

Marta Herbst-Spöttl

## **Beweise im Unterricht von angewandter Mathematik**

PFL-Mathematik, Nr. 5

IFF: Klagenfurt 1994

Redaktion:

Werner Peschek

Die Hochschullehrgänge "Pädagogik und Fachdidaktik für LehrerInnen" (PFL) sind interdisziplinäre Lehrerfortbildungsprogramme der Abteilung "Schule und gesellschaftliches Lernen" des IFF. Die Durchführung der Lehrgänge erfolgt mit Unterstützung von BMUK, BMWF und den Pädagogischen Instituten des Bundes in Kärnten und Wien.

## **Reihe "Pädagogik und Fachdidaktik für LehrerInnen"**

Herausgegeben von der

**Abteilung "Schule und gesellschaftliches Lernen"**

des Interuniversitären Instituts für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung

In dieser Reihe veröffentlicht die Abteilung "Schule und gesellschaftliches Lernen" des Interuniversitären Instituts für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung (IFF) Dokumentations-, Forschungs- und Entwicklungsarbeiten von TeilnehmerInnen der PFL-Lehrgänge, um sie einer breiteren Öffentlichkeit zugänglich zu machen.

Der Nachdruck, auch auszugsweise, ist nur mit Zustimmung des Instituts gestattet.

Exemplare können gegen Ersatz der Kopierkosten bei folgender Adresse angefordert werden:

IFF/Schule und gesellschaftliches Lernen  
Reihe "PFL"  
Sterneckstraße 15  
A-9020 Klagenfurt

# Beweise im Unterricht von angewandter Mathematik

## *Inhaltsverzeichnis:*

Einleitung	1
1. Zur Auswahl dieses Themas	2
2. Klärung der Begriffe und Situationsanalyse	2
2.1 Die Sicht des Problems von meiner Seite	
2.2 Das Problem aus der Sicht der Schüler	
2.3 Auswertung der Fragebögen	
2.4 Das Problem aus der Sicht einiger Fach- und Nichtfachkollegen	
3. Hauptergebnisse	12
3.1 Stichwortartige Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse aus den erfolgten Untersuchungen in Form von zwei Behauptungen	
3.2 Auswirkung auf meine bisherige Einstellung und Haltung	
3.3 Schlußfolgerungen für mein praktisches Handeln, meinen Unterricht	

## **Einleitung**

Ich unterrichte seit 1981 an der Handelsoberschule in Bozen das Fach Mathematik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in der 3., 4. und 5. Klasse der Fachrichtung für Programmierer. Diese umfaßt die letzten drei Klassen vor der Matura, also das 11., 12. und 13. Schuljahr. Die Anzahl der Wochenstunden für Mathematik beträgt fünf, fünf und vier Stunden, wobei die Schüler ein Wochenpensum von 37 bzw. 39 Stunden in den beiden letzten Klassen zu erfüllen haben.

Der Lehrstoff umfaßt in der dritten Klasse Algebra und Logik, Analysis (Funktionenlehre) und Stochastik (beschreibende Statistik und Wahrscheinlichkeitslehre).

In der vierten Klasse werden besondere Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Finanzmathematik, Lineare Algebra und die Differentialrechnung behandelt. Letztere wird in der Abschlußklasse ergänzt und vertieft; weiters werden in dieser Klasse Funktionen in zwei Variablen, Themen aus Operations Research (Lineare Optimierung in mehreren Variablen) und aus der Induktiven Statistik (Testen von Hypothesen und Schätzen) behandelt.

Die Schüler erhalten mit dem Bestehen der Matura an dieser Schule den Titel "Reifediplom in Rechnungswesen, Handel und Datenverarbeitung", welcher sie sowohl zu einem Weiterstudium an jeder Universität berechtigt, als auch zum Eröffnen eines Büros als Wirtschaftsberater nach drei Jahren entsprechender Praxis.

## 1. Zur Auswahl dieses Themas

In dieser Arbeit habe ich mir vorgenommen, den Themenkreis "Beweise" etwas ausführlicher zu analysieren. Warum? Ausgangspunkt zur Behandlung dieses Themas war die "Vorarbeit", welche ich für das 1. Seminar dieses PFL-Lehrganges schrieb. Die Arbeit bezog sich auf die Normalapproximation der Binomialverteilung und die Normalverteilung.

Die Auswahl des Problempunktes Beweise und somit auch die Vorarbeit, ist sicher durch meine unbefriedigenden Erfahrungen diesbezüglich im Unterricht und bei Matura-Prüfungen und durch eine Diskussion mit meinen Schülern der 4. Klasse zu Beginn des heurigen Schuljahres (1991/92) erfolgt. Hierzu vielleicht einige Zeilen aus meiner Vorarbeit:

*"... die Schüler verfolgten die Herleitung zwar interessiert, und zeigten auch, daß sie die Vorgangsweise verstanden hatten, am Ende aber kam doch die für sie wohl wichtigste Frage: 'Müssen wir diese Herleitungen auch können, verlangen Sie diese bei den Schularbeiten und Prüfungen?'"*

*Heuer sagte ich, daß alle Schüler imstande sein sollten, eine Erklärung in großen Zügen geben zu können. Ob dies allerdings wirklich sehr sinnvoll ist, vor allem in Hinsicht auf diesen Schultyp, bin ich mir selbst nicht ganz im klaren; für die Schüler ist dies nämlich sicher eine zusätzliche Belastung, die nicht dazu beiträgt, ihre Freude am Fach zu wecken.*

*..., daß ein großes Problem in meinem Unterricht, nicht nur bei der Behandlung dieses speziellen Lerninhalts, sondern ganz allgemein, die Motivation der Schüler für die Behandlung von mathematischen Beweisen u./o. für mathematisches Hintergrundwissen ist."*

In dieser Arbeit wollte ich auch versuchen, meine pädagogische und didaktische Position in diesem Themenbereich etwas zu klären, mein Wissen darüber und meine Sichtweise zu erweitern, um letztlich dadurch auch meine Unsicherheit in dieser Thematik etwas zu reduzieren. In diesem Zusammenhang wollte ich versuchen, die Auswahl der im Unterricht zu behandelnden Herleitungen und Beweise gezielter und überlegter zu treffen, sowie die entsprechende didaktische Aufbereitung und die methodischen Vorgangsweisen besser zu planen.

## 2. Klärung der Begriffe und Situationsanalyse

### 2.1 Die Sicht des Problems von meiner Seite

Hierzu will ich in Form von einigen Fragen und Antworten Stellung nehmen.  
Welches sind meine Wert- und Zielvorstellungen zu diesem Thema?

Das Behandeln von Beweisen im Mathematikunterricht finde ich wichtig, da ich der Überzeugung bin, daß ein Mathematikunterricht ganz ohne Beweise, ein falsches oder zumindest verzerrtes Bild liefert. Man würde den Schülern einen wesentlichen Aspekt der

reinen, theoretischen Mathematik vorbehalten. Ich bin mir allerdings bewußt, daß dies nur ein Aspekt unter vielen ist, aber auch, daß es kaum möglich ist, alle wichtigen Aspekte von Mathematik im Unterricht angemessen zu vermitteln.

Weiters, finde ich, können Beweise, falls sie didaktisch entsprechend aufbereitet und eingesetzt werden, auch ein - wenn auch sicher nicht das ideale - Hilfsmittel sein, allgemeine Bildungs- und Lernziele zu erreichen, wie zum Beispiel:

*Logisches, wissenschaftliches Denken und Arbeiten fördern und dem Schüler Möglichkeiten geben, hierin formale Fertigkeiten zu erwerben, rationale Argumentation üben und seine Bereitschaft und Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen fördern, die Fähigkeiten sowohl induktiv als auch deduktiv zu schließen, sauber und kohärent zu argumentieren, die Entwicklung einer analytischen und synthetischen Arbeitsweise zu fördern.*

Ich glaube, in manchen Fällen sind Beweise gute Hilfsmittel zum Erkennen, Erforschen und Erklären von Zusammenhängen; sie ermöglichen es, die innere Struktur von Begriffen (Sätzen) zu erklären, Begriffe miteinander zu verknüpfen und so logisches und folgerichtiges Überlegen, Argumentieren und Schließen zu lehren und zu lernen. Beweise können inhaltliche Einsichten vermitteln, die eine adäquate Anwendung eines Begriffes erleichtern. Außerdem sehe ich im Beweisen die Möglichkeit zur Verwendung verschiedener Darstellungsarten, zur Ordnung und Festigung des Wissens, und eine weitere Möglichkeit, mathematische Gesetze und Verfahren transparenter zu machen.

Was verstehe ich überhaupt unter "Beweis" und welche Handlungen, Situationsmerkmale und Vorgangsweisen kennzeichneten meinen bisherigen Unterricht?

Zunächst möchte ich zwischen deduktiven Beweisen (Satz gegeben, gesucht der Beweis) und Herleitungen des Satzes aus einer bestimmten Ausgangssituation (induktiver "Beweis") unterscheiden. Deduktive Beweise erweisen sich meist als zu schwierig, als daß man sie mit Schülern gemeinsam erarbeiten, oder diese sie gar selbständig erarbeiten könnten; man kann sie nur vorgeben, ausführlich besprechen und erklären. Meiner Meinung nach erscheinen solche Beweise den Schülern durch ihre Konstruktion oft sehr künstlich und in ihrer Entstehung nicht einsichtig; außerdem haben die Schüler bei diesen Beweisen oft das berechtigte, aber nicht gerade ermunternde Gefühl, so etwas selbst nie machen zu können, was zu einer Abwendung von den Themen führen kann. Deshalb bevorzuge ich Herleitungen, an deren Genese sich - so meine Erfahrung - durchaus auch Schüler aktiv beteiligen können.

Trotzdem erachte ich es als äußerst wichtig, daß sich Schüler auch mit vorgegebenen Beweisen deduktiver Art befassen, sie zu verstehen versuchen, und somit ein bestimmtes Gefühl für die Vorgangsweisen des Beweisens an sich bekommen.

Als Aufgaben und Übungen bevorzuge ich das Führen von Analogiebeweisen zu bereits bekannten vorgegebenen Beweisen (z.B.: Konvergenzbeweise, Monotoniebeweise, Symmetriebeweise) und die Verallgemeinerung eines Beweises als Erkenntnis aus verschiedenen Aufgaben, an denen der Beweisvorgang im speziellen Einzelfall vorgeführt worden ist. Solche Aufgaben stelle ich sowohl bei schriftlichen als auch bei mündlichen Prüfungen, wobei ich diese Aufgaben bei der Bewertung dann üblicherweise ungefähr gleich gewichte wie die anderen Aufgaben. Die vollständige und präzise Wiedergabe von Beweisen bei mündlichen Prüfungen verlange ich im allgemeinen nur von Schülern, bei denen ich keine zu starke Überforderung vermute, und die eine hohe Bewertung anstreben. Von allen anderen

verlange ich aber wenigstens einen Gesamtüberblick über die Vorgangsweise, das heißt, sie sollen die Beweisstruktur mit den entsprechenden Voraussetzungen und die einzelnen Beweisschritte in geordneter Folge angeben können.

Welches sind die Diskrepanzen zwischen meinen Vorstellungen und den bisher gemachten Erfahrungen?

Mein Eindruck und meine Erfahrung ist, daß die Beschäftigung mit mathematischen Beweisen der deduktiven Art bei einem Großteil der Schüler zu einem negativen Verhalten im Mathematikunterricht führt. Ihre Mitarbeit läßt nach, ebenso ihr Lerneifer und ihre Leistungen auf diesem Gebiet. Herleitungen stoßen zwar nicht auf die gleich starke Ablehnung, werden aber auch nicht mit dem von mir erwarteten Eifer, sondern zum Teil eher widerwillig aufgenommen, oft als Fachteilgebiet "2. Kategorie" angesehen und häufig nicht oder nur sehr oberflächlich gelernt. Häufig fehlen auch der Wille und die Bemühungen, diesen Teil des Lehrstoffes richtig zu verstehen und die Notwendigkeit vieler Beweise einzusehen. Warum? Liegt es nur daran, daß ich bei Leistungskontrollen zu wenig stark auf diesen Bereich poche, oder sind die Schüler wirklich überfordert? Sind die Schüler zu stark in ihrer Sichtweise von Mathematik verwurzelt? Einige Fragen, auf die ich Antworten suche und nur Vermutungen äußern kann.

Die letzte Frage zwingt mich aber zu einer Selbstanalyse: haben die Schüler meine Sichtweise verstanden? Können ihre Sichtweisen eigentlich nicht nur ein Spiegel der meinen sein? Die Schüler haben ja kaum außerschulische Erfahrungen mit Mathematik.

Interessante Erfahrungen, welche meines Erachtens nach die Einstellung vieler Schüler zu den Beweisen in der Mathematik beleuchtet, habe ich auch öfters bei mündlichen Maturaprüfungen gemacht.

Hierzu einige Erklärungen: bei uns werden die Maturafächer Jahr für Jahr neu festgelegt, und zwar müssen die Schüler zwei schriftliche Arbeiten schreiben, eine davon ist immer Deutsch, die zweite wechselt je nach Schultyp von Jahr zu Jahr. In der Programmiersektion war die 2. schriftliche Arbeit bisher in 60% der Fälle Mathematik. Bei den bisherigen schriftlichen Maturaarbeiten (diese werden vom Unterrichtsministerium in Rom zusammengestellt und sind in ganz Italien für den entsprechenden Schultyp gleich) wurden an unserem Schultyp bisher nie Herleitungen oder Beweise verlangt; neben der Lösung von bestimmten Aufgaben waren höchstens eine kurze Darstellung der entsprechenden Theorie oder einige Definitionen verlangt. Nach den beiden schriftlichen Arbeiten müssen die Schüler zwei mündliche Prüfungen ablegen. Die Fächerwahl dieser zwei Prüfungen erfolgt aus einer Liste von 4 Fächern und zwar: Deutsch, Italienisch und zwei von Jahr zu Jahr je nach Schultyp wechselnden Fächern. Die Prüfungsfächer werden jeweils im April bekanntgegeben, die Prüfungen finden dann Mitte Juni bis Mitte Juli statt. Zu bemerken bleibt, daß bei den mündlichen Prüfungen der Schüler ein Fach selbst wählt, und ihm das zweite Fach am Tage vor der Prüfung von der Prüfungskommission zugewiesen wird. Diese besteht aus 5 oder 6 Lehrpersonen anderer Schulen und einer Lehrperson der Klasse (die auch Lehrperson eines Nichtmaturafaches sein kann), die die Schüler vertritt.

Bei solchen mündlichen Maturaprüfungen passierte es mir häufig, daß Schüler, die in den Unterlagen als interessierte Schüler mit guten bis sehr guten Mathematikleistungen beschrieben waren, zwar die Lehrsätze oder Algorithmen richtig angeben und anhand von

Übungen richtig anwenden konnten, aber überhaupt keine Ahnung hatten, woher die benutzte Regel kam, unter welchen Bedingungen sie angewendet werden kann, welche Problemsituationen sich in der Anwendung ergeben können oder ähnliches. Dies, obwohl laut dem, vom Fachlehrer für die Prüfung abgegebenen Programm mit Lehrstoffangabe und methodisch didaktischen Hinweisen, auch Herleitungen bzw. Beweise behandelt worden waren.

Häufig hörte ich von Seiten der Schüler dann die Rechtfertigung, ihr Lehrer hätte diese Beweise nie abgefragt, behandelt hätten sie sie zwar schon, aber wichtig sei immer nur gewesen, die gestellten Aufgaben richtig zu lösen.

Hervorheben möchte ich auch noch die Erfahrung, daß Schüler (häufig solche mit weniger guten Beurteilungen) sehr wohl auch die Herleitungen gelernt hatten, wie sich aber zeigte, diese nicht immer verstanden, sondern eben nur auswendig gelernt hatten. Dieses Lernen der Beweise hatte ihnen also keine inhaltlichen Einsichten für eine angemessene Anwendung gebracht.

Diese Erfahrungen sind sicher keine Extremfälle, ähnliches hat jeder Mathematiklehrer schon erlebt, deshalb geben sie mir zu denken und zwar nicht nur die Prüfungssituationen, sondern auch die Diskussionen, welche sich manchmal nach abgeschlossener Prüfung, bei der Bewertung, mit den anderen Kommissionsmitgliedern ergaben. Meine Beurteilung, die in solchen Fällen meistens "nur" ein "Genügend" oder "Befriedigend" war, erschien manchen Kollegen häufig zu niedrig, da der Schüler doch "die gestellten Aufgaben alle richtig und problemlos gelöst hatte". Dieses Argument wird im übrigen sehr häufig auch von Schülern vorgebracht.

Um das "Warum" der Schülerhaltung etwas genauer abzuklären bzw. meine Eindrücke und die Vermutungen durch die Schüler selbst widerlegen oder bestätigen zu lassen und vor allem, um mit den Schülern über dieses "Fachproblem" ausführlich zu sprechen, ging ich in folgenden Schritten vor:

Nach dem ersten PFL-Seminar im Oktober 91, also ca. einen Monat nach Unterrichtsbeginn, errichtete ich in den beiden letzten Klassen, welche ich schon vom Vorjahr kannte, einen sogenannten "Beschwerde- oder auch Lobeshymnen- Briefkasten", in dem die Schüler alle ihre Gedanken zum Mathematikunterricht in anonymer Weise abgeben konnten.

Da es kurze Zeit zuvor in einer der beiden Klassen ein Gespräch über Sinn und Zweck der Beweise im Mathematikunterricht gegeben hatte, ging diese Klasse sofort auf meinen Vorschlag ein, in ihren Kritiken besonders das besagte Thema zu beachten, und es kamen einige Meldungen diesbezüglich. Leider flachte das Interesse an dieser Möglichkeit, Kritik zu üben, schnell wieder ab und nach einer ersten Entleerung des Briefkastens Ende Februar kamen trotz einiger Hinweise meinerseits fast keine Meldungen mehr, weder zum Thema Beweise, noch zum Mathematikunterricht im allgemeinen. Auch sind, wie ich vermute, die eingegangenen Meldungen nur auf eine kleine Gruppe der Schüler zurückzuführen.

Die andere Klasse äußerte sich bis Ende Februar zum Thema überhaupt nicht. Wahrscheinlich hatten die Schüler wenig Lust und Interesse, sich Gedanken über methodisch-didaktische Fragen zu machen und aufbauende Kritik zu üben! Vielleicht spürten sie zu wenig, daß es bei diesem Thema auch um sie ging.

Da ich also nur sehr spärliche und sicher auch nicht repräsentative Rückmeldungen erhalten hatte, beschloß ich mit den Schülern beider Klassen, nach der Behandlung von mir charakteristisch erscheinenden Fachteilgebieten mit entsprechenden Beweisen jeweils

Klassengespräche zu führen. In beiden Klassen ließ ich überdies am Ende des Schuljahres (Juni) einen kurzen Fragebogen ausfüllen.

## 2.2 Das Problem aus der Sicht der Schüler

Auswertung einiger schriftlichen Beiträge der Schüler aus dem Briefkasten und Auswertung der Notizen von Gesprächen mit den Schülern meiner beiden Klassen.

Schülerbeitrag 1:

*"Ich bin geteilter Meinung über die Beweise, denn einerseits finde ich sie nützlich und andererseits langweilig. Nützlich und interessant finde ich sie, wie wir sie in der Finanzmathematik gemacht haben, denn wenn man z.B. die Formel nicht mehr kann, so ist es sehr leicht, sie vom Beweis abzuleiten. Hingegen Beweise, die wir in der 3. Klasse gemacht haben, sind mir nicht gelegen, also war es für mich sehr langweilig. Ich glaube man sollte Beweise eher nur in solchen Gebieten, wie in der Finanzmathematik, machen."*

Zu Schülerbeitrag 1:

Ich glaube, daß dieser Beitrag deshalb sehr kennzeichnend ist, da bei vielen Schülern das Interesse an Beweisen, wie sich auch im Gespräch herausstellte, sehr stark vom Fachteilgebiet abhängt. Erklärend muß ich sagen, daß ich in dieser Klasse in der Finanzmathematik nur die Herleitung der End- und Barwertformel für die Renten und dabei auch die Herleitung der Summenformel für eine geometrische endliche Reihe behandelt habe. Aufgaben mit unterbrochenen, aufgeschobenen Renten, Rentenumformungen u.ä. wurden immer im speziellen Beispiel, nicht in der allgemeinen Form behandelt. Mit "Beweisen, wie wir sie in der 3. Klasse gemacht haben", bezieht sich die Meldung auf Beweise in der Mengenalgebra, Aussagenlogik, Beweise zu den algebraischen Strukturen und zur Booleschen Algebra, direkter Beweis, indirekter Beweis in der Zahlentheorie und die vollständige Induktion, Analogiebeweise zu Symmetrie und Monotonie bei Funktionen, Beweise in der Statistik zu den Eigenschaften von Mittelwerten und Streuungsmaßen.

Hier äußert sich auch die an diesem Schultyp sehr stark vertretene Einstellung, Mathematik hauptsächlich als Lieferant von Formeln und Lösungsalgorithmen für Probleme aus der wirtschaftlichen Praxis anzusehen. So empfinden viele Schüler z.B. Extremwertaufgaben interessant, solange sie sich mit Gewinn, Kosten u.ä. Begriffen beschäftigen, und wenn sie auch noch so konstruiert, im Grunde also Scheinanwendungen sind; Probleme anderer Natur, denen die wirtschaftliche Nutzung nicht direkt ablesbar ist, werden mit geringerem Interesse behandelt. Ist es den Schülern zu verdenken in der heutigen Zeit? Oder ist mein Aufgabenrepertoire so eingeschränkt und langweilig?

Schülerbeitrag 2:

*"Bezug auf die erste Zettelarbeit im 1. Semester:*

*Wirklich taktvoll fand ich das Einbauen von zwei Beweisen. In der Klasse sind fast alle gegen das Bringen von Beweisen. Mir wäre auch lieber, nichts beweisen zu müssen. Doch verstehe ich natürlich, daß die Lehrer daraus eine ganze Menge sehen: Um etwas beweisen zu können muß man gelernt haben, die Sache verstanden haben und "logisch" denken können bzw. die Sachen verbinden können. Doch wie gesagt, ich fand es riesig nett, daß sie uns entgegengekommen sind, indem sie pro Beweis 2 Punkte vergaben. Insgesamt konnte man 17 Punkte*



erreichen. Doch auch ohne die 2 Beweise, also schon mit 13 Punkten erhielt man eine 10. Wirklich eine taktvolle Geste."

Schülerbeitrag 3:

Teil a) "7.11.91: Die Mathematikstunde fand ich recht gut, weil der neue Stoff (3- $\alpha$ -Regel) gut erklärt und anhand von Beispielen geübt wurde."

Teil b) "13.11.91: Die Zettelarbeit war zu lang für die gegebene Zeit. Außerdem kamen darin Beweise vor, die wir zuvor nicht geübt haben!"

Schülerbeitrag 4:

"Betrifft 1. Mathematikzettelarbeit:

Meiner Meinung nach sollte bei einer Zettelarbeit nur die durchgemachte Theorie kommen, nicht irgendwelche Beweise, die man noch nie gesehen hat."

Zu den Schülerbeiträgen 2, 3 und 4:

Diese Beiträge beziehen sich speziell auf eine bestimmte Zettelarbeit, und zwar auf folgende zwei Aufgaben:

a) Beweise, daß für eine Zufallsvariable  $Y = aX + b$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:  $E(Y) = aE(X) + b$   
und  $V(Y) = a^2V(X)$

b) Beweise die Rekursionsformel:  $B_{n,p}(k+1) = \frac{p(n-k)}{(k-1)(1-p)} B_{n,p}(k)$

Beweis a) war im Unterricht nicht behandelt worden, sondern nur analoge; ebenso war b) wirklich "neu" für die Schüler, der Begriff Rekursion war allerdings aus dem Informatikunterricht bekannt.

Beitrag 2 sagt aber viel über die allgemeine Haltung aus:

Die Schüler erkennen zwar Sinn und Ziele, klassifizieren diese aber nur für den Lehrer, nicht für ihr eigenes Lernen als wichtig. In ihrer Rolle als Schüler ist die Bewertung etwas vom Wichtigsten, im Grunde sehen sie im Beweisen für sich selbst und ihr Lernen keinen Sinn. Bei der Verbesserung und Besprechung dieser Arbeit ließ ich Manuela, eine mittelmäßige Schülerin, Beweis a) an der Tafel machen und leistete dabei nur kleine Hilfestellungen. Sie schaffte die Aufgabe relativ leicht und schnell und erinnerte sich auch an den analogen Beweis, der in der Klasse behandelt worden war. In der Zettelarbeit hatte sie beide Beweise nicht behandelt.

Manuela erklärte daraufhin:

"... ich habe diesen Beweis zu Hause angeschaut, während des Tests habe ich zwar gesehen, daß die Aufgabe ähnlich ist, aber bei Beweisen bin ich immer so unsicher, ich weiß nicht, wie ich kontrollieren kann, ob ich richtig gearbeitet habe; außerdem brauche ich bei diesen Aufgaben sehr viel Zeit und da die eh immer schon sehr knapp ist, habe ich diese Aufgabe und auch den anderen Beweis gar nicht angefangen.

... diese Beweise sind auch sehr viel schwieriger als zum Beispiel eine Übung zu lösen. An der Tafel, wenn sie helfen und wenn ich nicht unter Zeitdruck stehe, schaffe ich es leichter..."

Manuelas Aussage wurde von mehreren Schülern der Klasse bestätigt.

Bei der Aussage, sie wüßten bei Beweisen gar nicht, ob sie richtig gearbeitet hätten, bezogen sich die Schüler weniger auf mögliche Denkfehler, sondern hauptsächlich auf Fehler rechen-technischer Art in der Durchführung bestimmter Beweispassagen, was ich im Zusammenhang mit diesen beiden, eher "technischen" Beweisen - die von den Schülern zwar operative Fertigkeiten verlangen, ihnen aber kaum inhaltliche Einsichten vermitteln - verstehen kann.

Schülerbeitrag 5:

*"Den eigentlichen Schulstoff aus Mathematik begrenzen bzw. einschränken und dafür mehr Übungen für Logisches Denken, z.B. Logeleien. Das wäre vorteilhaft für den Mathematik- sowie für den Informatikunterricht.*

*Bei Schularbeiten, Tests und mündlichen Prüfungen ist die Abfrage von Herleitungen unnützlich, weil es dem Schüler freigestellt werden soll, ob er sich Gedanken darüber machen will oder nicht. Wenn es den Schüler selbst interessiert und wenn die Herleitung für ihn eine Hilfe ist, so macht er dies freiwillig und selbständig."*

Zu Beitrag 5:

Betreffend den ersten Teil, wurde mir eine Hausaufgabe, welche die Klasse in Informatik als Wiederholungsaufgabe erhalten hatten, beigelegt. War wohl als guter Tip gemeint!

Teil 2 legt eine eher extreme Position dar, die zu akzeptieren ich Schwierigkeiten habe, da meine Erfahrung mich bisher gelehrt hat, daß in der Schule selbständiges und freiwilliges Arbeiten in eher unbeliebten Gebieten nur sehr selten erfolgt. (Aber vielleicht trage ich selbst dazu bei, daß dieses oder bestimmte andere Fachthemen eher unbeliebt sind!). Diese Schülerposition wurde auch in einer Klassendiskussion mehrere Male vertreten. Ich vertrat dabei die Meinung, daß ich dies nicht so ganz glauben könne, weil ich so etwas bis jetzt leider noch nicht bzw. nur ganz selten erlebt habe, und etwas scherzhaft fügte ich hinzu, sogar wir Mathematiklehrer müßten oft zu unserem "Glück" = "Lehrerfortbildung" gezwungen werden, da uns zwar bestimmte Themen z.B. der Pädagogik und Didaktik interessieren, aber wir uns deshalb nicht unbedingt freiwillig damit ausführlich beschäftigen. Dafür erntete ich ein Klatschen und verständnisvolles Lächeln, wohl weil ich gebeichtet hatte, auch mit ihren gleichen "Mängeln" behaftet zu sein, aber ich glaube, dadurch haben die Schüler auch ihre Zustimmung zu meiner Einschätzung ausgedrückt. Im übrigen erklärten einige Schüler von sich aus, sie würden zwar freiwillig Übungen von den ausgeteilten Übungsblättern zur Vorbereitung auf Leistungskontrollen machen, aber ganz selten jene, die Beweise zum Inhalt hätten. Warum? Angeblich, weil man bei Leistungskontrollen meistens auch ohne Aufgaben zu Beweisen gelöst zu haben, eine positive Bewertung erzielen kann.

Schülerbeitrag 6:

*"Meiner Meinung nach ist es gut, daß ab und zu Beweise gemacht werden, um nicht einfach eine Formel so hinzunehmen, sondern auch zu wissen, wo sie überhaupt herkommt bzw. wie sie zustande kommt. Wenn aber die durchgemachten Beweise, die eher etwas kompliziert sind, beim Prüfen genau abgefragt würden, fände ich das nicht gut. Schluß: Beweise - so viele als nötig - so wenig als möglich!!!"*

Zu Beitrag 6:

Dazu will ich nicht viel sagen, da die Worte "wenn ... genau abgefragt würden", für sich sprechen. Wie bereits in 2.1 beschrieben, befasse ich mich zwar im Unterricht viel mit Herleitungen, Begründungen und Beweisen, bei den Leistungskontrollen verzichte ich in

bestimmten Fällen aber auf ein zu strenges Abfragen dieser Teile. In welchen Fällen? Das kann ich eigentlich nicht präzise beantworten, will und muß ich in Zukunft aber sicher genauer überlegen. Ich habe mich bisher oft einfach auf mein Gefühl verlassen. Ich verzichte auf endloses Weiterbohren, wenn ich sehe, daß ein Schüler in seinen Fähigkeiten und Fertigkeiten dadurch überfordert ist.

Diese Beiträge und Gesprächsanalysen bezogen sich auf eine der beiden Klassen.

In meiner anderen Klasse (Maturaklasse) kristallisierten sich im Laufe der Diskussion folgende, sich von den restlichen etwas unterscheidende, Stellungnahmen heraus:

*"... Wir sind es nun seit drei Jahren gewöhnt, daß Sie immer nach der Begründung fragen und fast alles herleiten oder beweisen;"*

*"... wir wissen, daß wir diese genau so lernen und wissen müssen, wie viele andere unnütze Sachen auch, wenn wir die Matura bestehen wollen;"*

*"... so wie wir es machen, geht es eh noch gut, in anderen Klassen müssen sie z.B. die ganzen Lehrsätze der Analysis beweisen können, die wir zum größten Teil überhaupt nicht besprochen haben;"*

*"... interessant sind die Herleitungen in einigen Fällen eigentlich schon, aber im Endeffekt ist es trotzdem wichtiger, die Formeln und Algorithmen richtig anwenden zu können; außerdem ist es heute oft sogar unwichtig, diese auswendig zu können, da man vielfach ja eh den PC oder TR mit entsprechender Software zu Hilfe nimmt, um die Probleme zu lösen. Wichtig ist, die Aufgabe richtig zu analysieren und zu klassifizieren, um dann das richtige Werkzeug aus dem Kasten zu nehmen; wichtig ist nicht, wie dieses Werkzeug arbeitet, sondern welches Ergebnis es liefert."*

Besonders diese letzte Aussage zeigt ziemlich deutlich, daß es mir bei diesem Schüler wohl nicht gelungen ist, den Sinn und die Bedeutung von Beweisen, und ganz allgemein von Mathematik, in angemessener Weise zu klären. Wie sonst ist seine "verschobene" Vorstellung von Mathematik-Computer-Beweisen, das Nichterkennen, daß gerade das Wissen wie das "Werkzeug" Computer arbeitet, wie das von ihm gelieferte Ergebnis zustande kommt und was dieses Ergebnis bedeutet, von Wichtigkeit ist, zu erklären?

Die stichwortartig wiedergegebenen Aussagen stammen natürlich von verschiedenen Schülern, aber im großen und ganzen erschien mir die Klasse während der Diskussion ziemlich einig in der Ansicht, die man kurz und bündig mit "Beweise sind unnützlich" zusammenfassen könnte.

Ich frage mich: Hatten die Schüler etwa schon resigniert, etwas ändern zu können? Wollten sie einfach nur noch dieses Unterrichtsjahr möglichst "reibungslos" hinter sich bringen, hatten sie nur mehr die bevorstehende Matura vor Augen? Zum Zeitpunkt dieser Diskussion waren die Maturafächer dieses Jahres noch nicht bekannt. Zu einem späteren Zeitpunkt - inzwischen wußten die Schüler, daß dieses Jahr Mathematik mündliches Prüfungsfach war - versuchte ich nach einer gut gelungenen Wiederholungsprüfung mit der geprüften Schülerin und den Klassenkameraden wieder das Thema Beweise zu besprechen. Leider kam überhaupt

keine Diskussion zustande und alle Schüler wünschten sich nur, ich möchte in meinem Bericht für den Prüfungskommissär möglichst genau angeben, wie ich sie auf die Prüfung vorbereitet hatte, d.h. welche Beweise wir besprochen hatten und welche nicht, ansonsten hätten sie eigentlich nichts an der Art meines Unterrichts auszusetzen, da ich den Stoff immer ausführlich und gut erklärte.

Jetzt, im nachhinein gesehen: der Zeitpunkt für eine Diskussion war höchst ungünstig gewählt!

### 2.3 Auswertung der Fragebögen

Um die Meinungen der Schüler etwas präziser überblicken zu können und vor allem um alle einzubeziehen (bei den Diskussionen und schriftlichen Beiträgen beteiligten sich natürlich nicht alle Schüler), und um auch einige quantitative Anhaltspunkte zu erhalten, stellte ich folgenden kurzen Fragebogen zusammen und verteilte ihn in den beiden Klassen. Insgesamt beantworteten ihn in der 4. Klasse alle 19 Schüler, in der fünften Klasse 15 der 16 Schüler; ein Fragebogen wurde leer abgegeben.

Hier der Fragebogen und die entsprechende Anzahl der Nennungen:

*Kreuze die Deiner Meinung entsprechende Antwort an!*

1) *Wie findest Du das Behandeln von Beweisen und Herleitungen im Mathematikunterricht des heurigen und des letzten Schuljahres?*

*(Mehrere Antworten sind möglich)*

- |  |    |
|--|----|
| a) <i>interessant</i>  | 2  |
| b) <i>in manchen Fachteilgebieten interessant</i>                | 15 |
| c) <i>langweilig</i>   | 8  |
| d) <i>nützlich, da sie zum Verständnis des Stoffes beitragen</i> | 10 |
| e) <i>gänzlich überflüssig</i>                                   | 8  |

2) *Wie beurteilst Du den Umfang und die Anzahl der behandelten Beweise, Herleitungen und entsprechenden Aufgaben und Übungen?*

- |                          |    |
|--------------------------|----|
| a) <i>zu viele</i>       | 10 |
| b) <i>gerade richtig</i> | 24 |
| c) <i>zu wenige</i>      | 0  |

3) *Sollen Beweise und Herleitungen bei Leistungskontrollen verlangt werden? Und zwar*

<i>bei mündlichen Prüfungen:</i>	<i>ja 14</i>	<i>nein 20</i>
<i>bei schriftlichen Prüfungen:</i>	<i>ja 18</i>	<i>nein 16</i>

- 4) *Wie wird das Können und Wissen von Beweisen bei der Bewertung berücksichtigt?*
- |                          |    |
|--------------------------|----|
| a) <i>zu wenig</i>       | 2  |
| b) <i>gerade richtig</i> | 24 |
| c) <i>zu stark</i>       | 5  |
- 
- 5) *Hast Du Beweise und Herleitungen, wie sie im Unterricht behandelt wurden, verstanden?*
- |                      |    |
|----------------------|----|
| a) <i>immer</i>      | 4  |
| b) <i>fast immer</i> | 20 |
| c) <i>selten</i>     | 8  |
| d) <i>nie</i>        | 2  |
- 
- 6) *Hast Du Beweise, Herleitungen und Aufgaben dazu in deinen Vorbereitungen gelernt und geübt?*
- |                      |    |
|----------------------|----|
| a) <i>immer</i>      | 8  |
| b) <i>fast immer</i> | 18 |
| c) <i>selten</i>     | 5  |
| d) <i>nie</i>        | 3  |

Zur ersten Frage möchte ich bemerken, daß die Kombination Antwort a) und d) 2 mal, b) und d) 3 mal, c) und e) 4 mal angekreuzt wurde.

Da ich die Schüler ziemlich gut kenne und ja während der Diskussionen ihre Meinung ungefähr zutage gekommen war, waren die Verteilungen der Antworten auf die einzelnen Fragen für mich eigentlich eher überraschend; in bezug auf die Ehrlichkeit bei den Antworten, vor allem zu Frage 5 und 6 muß ich außerdem dringendst Bedenken anmelden. Ebenso glaube ich, ergibt das Ergebnis zu Frage 1 und 2 ein zu positives Bild, wenn es auch nicht in Widerspruch zu manchen bereits diskutierten Schülerbeiträgen steht.

Ich vermute: einige Schüler, die sich bisher nie geäußert hatten, haben sich im Laufe der Gespräche und Diskussionen wohl einfach der Meinung einiger ihrer Freunde oder Mitschüler angeschlossen!

#### **2.4 Das Problem aus der Sicht einiger Fach- und Nichtfachkollegen**

Gespräch mit einigen Nichtfachkollegen (Kommissionsmitglieder, Klassenratmitglieder meiner Schule):

*"... Beweise und Herleitungen sollten weder im Mündlichen noch im Schriftlichen abgefragt werden, da sich die Schüler hier sehr schwer tun und außerdem sind sie an dieser berufsbildenden Schule nicht unbedingt ein sehr wichtiges Lernziel. Außerdem studieren die meisten jener Schüler, die ein Weiterstudium antreten, eh Wirtschaft, und wenn einer Mathematik oder Informatik studieren geht, dann wird er sich schon an der Uni noch genug und*

*ausführlichst mit solchen Beweisen plagen müssen."*

*"... diese Schule hat berufsbildenden Charakter, bereitet nicht spezifisch auf ein Mathematikstudium vor, deshalb ist es sicher wichtiger, daß der Schüler gestellte Aufgaben und Probleme richtig lösen kann, im Beruf oder in der Praxis muß er sicher nicht begründen, warum er diese oder jene Formel benützt, um die Zinsen, Raten o.ä. zu berechnen."*

Vielleicht sind beide Formulierungen auch etwas überspitzt, aber inhaltlich spiegeln sie, meiner Meinung nach, die Position vieler schulexterner Personen aus der Wirtschaft und Industrie wieder und werden auch von den Schülern sehr gerne in den Mund genommen.

Gespräche mit zwei Fachkollegen an meiner Schule:

Auf den Hinweis meiner Maturanten, daß in anderen Klassen noch viel mehr mit Beweisen gearbeitet werde, bat ich einen Fachkollegen und eine Kollegin um ein Gespräch. Natürlich erklärte ich ihnen, daß ich für meine Studie zu diesem Thema gerne ihre Meinung gehört hätte. Beide erklärten sich einverstanden, da sie darin außerdem eine gute Gelegenheit sahen, unseren Unterricht vor allem in den Maturaklassen etwas genauer zu koordinieren, so daß unsere Klassen bei der Matura ungefähr den gleichen Vorbereitungsgrad zeigten. Besonders konzentrieren wollte ich mich im Gespräch darauf, welche Beweise aus den wichtigsten Fachteilgebieten meine Kollegen behandelten, und wie sie dabei vorgehen. Ebenso wollte ich die Rolle der Beweise bei ihren Leistungskontrollen besprechen.

Höchstwahrscheinlich hatte ich mir, aufgrund der Äußerungen der Schüler, eine von meiner Einstellung ziemlich verschiedene Meinung und Vorgangsweise im Unterricht erwartet. Deshalb war ich eigentlich eher verwundert, vielleicht sogar etwas enttäuscht, da es zu keiner "großen" didaktischen Diskussion kam, als meine beiden Kollegen in ihren Darstellungen im großen und ganzen mit mir übereinstimmten. Aufgefallen ist mir, daß mein Kollege insgesamt eine größere Anzahl an Beweisen - und dabei speziell deduktive Beweise zu Lehrsätzen aus der Analysis - im Unterricht behandelt als ich. Beide hoben außerdem hervor, daß es auch für sie äußerst schwierig sei, die Schüler für Beweise zu motivieren.

### **3. Hauptergebnisse**

#### **3.1 Stichwortartige Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse aus den erfolgten Untersuchungen in Form von zwei Behauptungen**

- a) Die Schüler betrachten Mathematik an einer berufsbildenden Schule hauptsächlich als Lieferant von Regeln und Lösungsalgorithmen für Probleme aus der wirtschaftlichen Praxis; mathematische Beweise betrachten sie deshalb als überflüssig.
- b) Beweise und Herleitungen in der Mathematik werden von den Schülern zwar als wichtig und zum Teil auch als interessant betrachtet, aber sie beschäftigen sich ungern damit und haben Probleme bei entsprechenden Aufgabenstellungen, weil sie meistens überfordert sind; wenn nicht inhaltlich, dann wahrscheinlich durch allgemeinen Leistungsdruck und Zeitdruck bei Leistungskontrollen.

### 3.2 Auswirkung auf meine bisherige Einstellung und Haltung

Ich glaube, mein Eindruck, daß die Beschäftigung mit mathematischen Beweisen bei vielen Schülern zu einer negativen Einstellung zum Mathematikunterricht führt, wurde durch meine Untersuchungen nur zum Teil bestätigt. Ich glaube, nicht die Beschäftigung an sich führt dazu, sondern wohl eher die Neuartigkeit der Vorgangsweisen und/oder das Nicht-Erkennen des Standpunktwechsels.

Ich glaube Behauptung b) aus 3.1 beinhaltet einige wahre Punkte, die ich verstehe und auch akzeptiere: viele Schüler sehen sich wirklich überfordert durch die Veränderung der Sichtweise; der Übergang vom rechentechnischen Aspekt der Mathematik, welchen sie (wenigstens bei uns bis zum 10. Schuljahr) bisher fast ausschließlich kennengelernt haben, zu anderen Aspekten, fällt ihnen extrem schwer. Die Einstellung der Schüler und ihre Selbsteinschätzung der Fähigkeiten kann sich nicht ohne eine bestimmte Hilfestellung von Seiten des Lehrers und einer entsprechenden Übergangszeit verändern.

Ich bin überzeugt, daß mit den Schülern zuwenig über das mathematische Beweisen gesprochen wird, daß ihnen zu wenig erklärt wird, worum es eigentlich geht. Die Funktion des Beweises in der Mathematik und auch in außermathematischen Bereichen muß mit den Schülern besprochen werden. Sie haben Angst vor Beweisen, weil ihnen durch den Unterricht viel zu oft der Eindruck von mathematischen Beweisen als etwas Statischem, das man passiv aufnehmen und reproduzieren muß, vermittelt wird. Ich glaube, die Frage nach der Entstehung des Lerngegenstandes geht viel zu oft verloren, geschweige denn das Aufzeigen der geschichtlichen Entwicklung der Beweise in der Mathematik.

Ich lehne die Sichtweise von Mathematik in Behauptung a) aus 3.1 ab; im Grunde kann ich aber verstehen, daß sich Schüler nur dann für Beweise interessieren, wenn es ihnen direkt etwas bringt, wenn sie also sehen, daß und wie ihnen der Beweis hilft, den Lehrsatz oder einen Begriff in Anwendungssituationen richtig zu gebrauchen. Ein sehr (selbst-)kritisches Überlegen meinerseits, welchen Beitrag zum besseren Begriffs- und Anwendungsverständnis ein Beweis oder eine Herleitung liefern kann, könnte die Motivation der Schüler also durchaus steigern.

Außerdem glaube ich, sollten wir Mathematiklehrer den Schülern bewußt machen - wenn dies auch für sie nicht unbedingt eine direkte Motivation für die Beschäftigung mit Beweisen sein muß - daß nicht nur realwissenschaftliche Fragen die Mathematiker zur Suche nach Lösungen für Probleme anregen - und sich so Theorien ergeben, die z.T. über die ursprüngliche Fragestellung hinausgehen (Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie) - sondern daß auch das umgekehrte Phänomen von Wichtigkeit ist, wo mathematische Theorien rein innermathematisch entwickelt wurden, und oft erst nach erheblichen Zeitabständen in neu aufgetauchten realwissenschaftlichen Fragestellungen angewandt wurden (z.B. Boolesche Algebra).

Die Schüler dürfen meiner Meinung nach Mathematik weder nur als Hilfsmittel, noch nur als reine Mathematik kennenlernen. Ich möchte ihnen ein möglichst ausgewogenes Bild vermitteln.

### **3.3 Schlußfolgerungen für mein praktisches Handeln, meinen Unterricht**

Ich werde in meinem Unterricht sicher mehr mit den Schülern über die Rolle bestimmter Beweise und generell über das Thema Beweise sprechen. Die Schüler sollen auch im Überlegen, Argumentieren und Erarbeiten, und nicht nur in der reinen Anwendung der Begriffe und Gesetze, das mathematische Tun erkennen. Dies möchte ich vor allem dadurch erreichen, daß ich in Zukunft wohlüberlegt entscheiden will, welcher Beweis für die Schüler hilfreich für ein anwendungsorientiertes Begriffsverständnis sein kann, und ihnen auch vom Schwierigkeitsgrad her, zumutbar ist. Die Erklärung und Beschreibung solcher wesentlichen, in der Schule behandelten Beweise, werde ich dann auch bei Prüfungen verlangen. Ich werde außerdem genau überlegen, auf welche Beweise oder Herleitungen ich trotz ihres theoretischen Interesses im Unterricht verzichten kann, und welche hingegen wichtig für ein ausgewogenes Bild von Mathematik, und auch motivierend für Schüler sein können. Für die Schüler neue Beweise werde ich bei Schularbeiten und Prüfungen nicht mehr verlangen, da in solchen Situationen Zeitdruck und andere emotionale Faktoren viel zu starken Einfluß haben. Vorgenommen habe ich mir auch, bei bestimmten Themenkreisen teils auf die rechentechnische Lösung von Aufgaben zu verzichten und mehr Aufgaben und Probleme zu stellen, die richtig analysiert werden müssen, und bei denen nur der Lösungsvorgang korrekt beschrieben und begründet werden muß.

Zusammenfassend glaube ich sagen zu können, daß es mir durch diese Studie gelungen ist, mein Wissen und meine Sichtweise zu diesem Thema etwas zu erweitern. Für meinen Unterricht haben sich in bezug auf Beweise bereits kleine Veränderungen ergeben. Wenn ich trotz der erfolgten Problematisierung auch auf einige Fragen noch keine befriedigenden Antworten finden konnte, so empfinde ich aber bereits dieses Bewußtsein als positiv.

Dr. Marta Herbst-Spöttl  
Handelsoberschule "H. Kunter"  
Serneser Platz 1  
I-39100 Bozen / Südtirol