MNI-Fonds für Unterrichts- und Schulentwicklung
S2 „Grundbildung und Standards“

Entwicklung und Verlauf individueller Rechenstrategien bei Volksschulkindern

Mag. Maria Fast

Kirchliche Pädagogische Hochschule in Wien/Krems
Campus Wien-Strebersdorf

Volksschuldidaktik Mathematik

Wien, Juli 2008

INHALTSVERZEICHNIS

ABSTRACT

Dieses Projekt ist kein unmittelbares Unterrichtsprojekt, sondern analysiert Daten aus drei Unterrichtsprojekten, die in den vorhergegangenen Jahren bei IMST durchgeführt wurden. Thematisiert wird das Vorgehen von Kindern beim Rechnen von Plus- und Minusaufgaben. Der Beitrag beschreibt, mit welchen Rechentypen (Kopfrechnen, schriftliches Rechnen, ziffernweise mündliches Rechnen) und mit welchem Erfolg Schülerinnen und Schüler zweier Klassen sechsmal Aufgaben von der zweiten bis zur vierten Schulstufe bearbeiteten. Zusätzlich wird der Frage nachgegangen, ob es Unterschiede zwischen Buben und Mädchen gibt. Ziel des Projekts ist, auf Basis der gewonnenen Erkenntnisse Empfehlungen für den Mathematikunterricht abzuleiten, die ein Zahl- und Operationsverständnis sichern.

Schulstufe: 2. bis 4. Schulstufe

Fächer: Mathematik

Kontaktperson: Mag. Maria Fast

Kontaktadresse: Kirchliche Pädagogische Hochschule in Wien/Krems
Campus Wien-Strebersdorf
Mayerweckstraße 1
1210 Wien

maria.fast@kphvie.at

1 EINLEITUNG

Mit einer Novelle zum Schulunterrichtsgesetz (SCHUG) wurde am 8. Juli 2008 im Parlament die rechtliche Grundlage für die Einführung von Bildungsstandards fixiert. Die in Österreich konzeptionierten Bildungsstandards legen fest, was Schülerinnen und Schüler in einzelnen Unterrichtsgegenständen, unter anderem auch in Mathematik nach der 4. Schulstufe, können sollen. Bildungsstandards definieren eine zeitgemäße mathematische Bildung, indem sie Standards für Grundkompetenzen von Schülerinnen und Schülern festlegen. Das ergibt eine etwas andere Sicht auf das Können bzw. Lernen der Kinder. Die beschriebenen Standards einer Kompetenz sind die Fähigkeiten und Fertigkeiten der Kinder am Ende der Volksschule, das Ziel nach vier Jahren. Lehrerinnen und Lehrer sind gefordert, die Bildungsstandards umzusetzen. Im Zentrum stehen daher pädagogisch-didaktische Überlegungen, wie Lernen in der Volksschule stattfinden soll, um mathematische Kompetenzen aufzubauen.

Dazu ist Wissen notwendig, wie sich mathematische Kompetenzen entwickeln. Dieses fehlt derzeit noch weitgehend (REISS, HEINZE & PEKRUN, 2007, S. 111). Diese Arbeit will dazu einen Beitrag leisten. Es geht um die Entwicklung des arithmetischen Denkens von Volksschulkindern. Das Projekt fokussiert den Kompetenzerwerb im Bereich „Arbeiten mit Rechenoperationen“, und zwar bei Addition und Subtraktion. Kompetenz in diesem Bereich bedeutet, dass Schülerinnen und Schüler nicht nur über gewisse Rechenfertigkeiten verfügen, sondern auch mit Zahlen reflektiert umgehen und aufgabenadäquat die Lösungsmethoden flexibel einsetzen können. Elementares Rechnen umfasst daher auch mathematische Aspekte, wie das Erkennen von Zusammenhängen und Strukturen. Diese dürfen nicht außer Acht gelassen werden.

Ziel des Projektes ist, das Vorgehen von Kindern beim Rechnen von additiven Rechenoperationen von der 2. bis zur 4. Schulstufe zu beschreiben. Nicht nur das vordergründige Durchführen von Verfahren interessiert, sondern auch inwieweit mathematische Aspekte, inhärente Strukturen erkannt werden. Nachgegangen wird vor allem der Frage, wie viel Verständnis des Stellenwerts, der grundlegenden Idee unseres dekadischen Zahlensystems, eingesetzt wird, um Rechenoperationen durchzuführen. Inwieweit können Kinder ihr mathematisches Wissen anwenden oder spulen sie nur eintrainierte Verfahren ab? Nützen Kinder Zahlbeziehungen aus, um geschickter zu Lösungen zu gelangen?

Durch einen zusätzlichen Hinweis von IMST wird darüber hinaus das Vorgehen von Buben und Mädchen differenziert betrachtet. Alles selbstverständlich unter dem Aspekt, der in der Mathematik unweigerlich auftritt, nämlich unter dem Aspekt der Korrektheit der Ergebnisse.

Anhand dieser Analyse sollen Folgerungen abgeleitet werden, wie Mathematikunterricht gestaltet werden soll, dass damit ein gesicherter Zahlbegriff und tragfähige Strategien zum Lösen von Rechnungen entstehen.

Wie aus den bisherigen Ausführungen bereits ersichtlich, ist dieses Projekt nicht, wie bei IMST üblich, ein unmittelbares Unterrichtsprojekt, sondern es analysiert Daten aus drei Unterrichtsprojekten, die in den vorhergegangenen Jahren bei IMST durchgeführt wurden.

2 ADDIEREN UND SUBTRAHIEREN, EIN ASPEKT DER GRUNDBILDUNG

Addieren und Subtrahieren sind keine unbekannten Tätigkeiten in der Volksschule. Sie werden in der Bevölkerung, aber auch in den gesetzlichen Bestimmungen als eine wichtige Aufgabe der Volksschule angesehen, diese zu erlernen. Seit jeher wird das Lernen von „Lesen, Schreiben und Rechnen", die *„Entwicklung und Vermittlung grundlegender Kenntnisse, Fertigkeiten, Fähigkeiten, Einsichten und Einstellungen, die dem Erlernen der elementaren Kulturtechniken […] dienen"* (Lehrplan der Volksschule, 2007, S. 6) hervorgehoben.

Im Folgenden werden Addition und Subtraktion, welche in diesem Projekt von der zweiten bis zur vierten Schulstufe thematisiert werden, ausgehend vom Lehrplan (inputorientiert) und den Bildungsstandards (outputorientiert) dargestellt.

2.1 Lehrplan

Die in den Grundzügen schon seit 1986 geltenden Zitate aus dem Lehrplan stellen sicher, dass alle Kinder in Österreich eine Grundbildung bezüglich Addieren und Subtrahieren in der Volksschule erwerben. Nicht nur das Endprodukt, das richtig gelöste Rechensätzchen, ist wichtig, sondern beim *„mündlichen und schriftlichen Rechnen ist auf das Verständnis der Zusammenhänge zwischen den Operationen, auf das Erkennen zugrunde liegender Rechenregeln und das Finden von Lösungsstrategien Wert zu legen"* (Lehrplan, 2007, S. 162).

Ein Schwerpunkt der **Grundstufe 1**, die im Regelfall von den Kindern in zwei Jahren absolviert wird, ist das „*Durchführen der Rechenoperationen im additiven […] Bereich ohne und mit Notation der Rechensätze"* (Lehrplan der Volksschule, 2007, S. 146). Das umfasst alle Additionen und Subtraktionen mit Zehnerüber- und Zehnerunterschreitung im Zahlenraum 100. Dabei sollen operative Zusammenhänge, wie *„z. B. Tausch-, Nachbar-, Umkehr- und Analogieaufgaben"* (Lehrplan der Volksschule, 2007, S. 146) erkannt werden.

Auf der **Grundstufe 2**, welche die dritte und vierte Schulstufe umfasst, wird neben dem mündlichen Rechnen ab dem Zahlenraum 1 000 auf das schriftliche Rechnen erweitert.

Das mündliche Rechnen im additiven Bereich ist *„für die Förderung des Zahlenverständnisses, der Rechenfertigkeit"* und *„des Operationsverständnisses"* (Lehrplan der Volksschule, 2007, S. 152) bedeutend. Rechenoperationen sollen *„durch Zerlegen und Notieren der einzelnen Teilschritte, Berücksichtigen der Stellenwerte, Anwenden von Rechenregeln, z. B. Verteilungsregel"* (Lehrplan der Volksschule, 2007, S. 153 bzw. 154) durchgeführt werden.

Die schriftlichen Rechenverfahren bei „*Addieren und Subtrahieren (Ergänzungsverfahren")* (Lehrplan der Volksschule, 2007, S. 153) sollen nicht nur durchgeführt, sondern die Rechenschritte sollen *„durch die Einsicht in die den Operationen zugrundeliegenden Rechenregeln (z. B. Bündelungsprinzip, Monotonie der Subtraktion)"* (Lehrplan der Volksschule, 2007, S. 153 bzw. 154) verstanden werden.

2.2 Bildungsstandards

Unter dem inhaltlichen Kompetenzbereich *Arbeiten mit Operationen* werden im Zusammenhang mit Addition und Subtraktion folgende Deskriptoren angeführt, die das Können der Kinder am Ende der vierten Schulstufe konkretisieren.

Die vier Grundrechnungsarten und ihre Zusammenhänge verstehen

Die Kinder

- verfügen über Einsicht in das Wesen von Rechenoperationen,
- verstehen die Zusammenhänge zwischen den Grundrechnungsarten,
- verwenden Umkehroperationen, auch zur sinnvollen Überprüfung des Ergebnisses,
- verwenden Tausch-, Nachbar- und Analogieaufgaben.

Mündliches Rechnen sicher beherrschen

Die Kinder

- beherrschen sicher und schnell additive Grundaufgaben im Zahlenraum 20,
- […]
- führen nicht automatisierte Rechenoperationen in Teilschritten durch,
  […].

Schriftliche Rechenverfahren beherrschen

Die Kinder

- beherrschen die Algorithmen der schriftlichen Verfahren für Addition, Subtraktion, […]
- verstehen die Algorithmen der schriftlichen Rechenverfahren
  […].

(Bildungsstandards Mathematik 4, S. 24)

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass sowohl im Lehrplan als auch in den Bildungsstandards Addition und Subtraktion beschrieben sind und als essentielle Bestandteile des Mathematikunterrichts der Volksschule gelten. Der Lehrplan führt didaktische Richtlinien, wie z. B. die Monotonie der Subtraktion als zugrundeliegende Rechenregel der schriftlichen Subtraktion an. Bildungsstandards beschreiben das erwartete Leistungsniveau der Schülerinnen und Schüler.

3 GRUNDLEGENDES UND FORSCHUNGSEVIDENZ ZU ADDITION UND SUBTRAKTION VON DER 2. BIS ZUR 4. SCHULSTUFE

3.1 Rechentypen

Bei den Rechenverfahren, welche die Kinder von der ersten bis zur vierten Schulstufe in der Volksschule verwenden, lassen sich zwei verschiedene Zugänge unterscheiden, nämlich das *Zahlenrechnen,* das Rechnen mit den Zahlganzheiten, und das *Ziffernrechnen,* das Rechnen mit den Ziffern in den Stellenwerten.

Beim **Zahlenrechnen** wird mit den Zahlganzheiten operiert. Die Stellenwerte, nämlich Einer, Zehner, Hunderter … werden bei jedem Gedankenschritt ins Kalkül miteinbezogen und müssen daher auch verstanden werden. Rechnen mit Zahlganzheiten trägt zum Verständnis des dekadischen Zahlensystems bei. Das Rechnen ist „ikonischer" Natur (PLUNKETT, 1987, S. 44), weil eine Vorstellung des Zahlenraums unabdingbar ist. Rechnen mit Zahlganzheiten ist allerdings begrenzt, weil es nicht bei Aufgaben jeglicher Komplexität angewendet werden kann. Die Rechenoperationen, die im Schuleingangsbereich mündlich mit Notation der Rechensätze oder als Kopfrechnung durchgeführt werden, beschränken sich auf einen eher kleinen Zahlbereich.

Beim (Zahlen-)Rechnen mit zweistelligen Zahlen bedient sich das Kind und auch der Erwachsene implizit der Rechengesetze, wie z. B. das Kommutativ- und das Assoziativ- und das Distributivgesetz, um Operationen durchführen zu können,

Bsp. 1: $32 + 48$ - Kommutativgesetz
$32 + 48 = 48 + 32 = 80$

Bsp. 1: $32 + 48$ - Assoziativgesetz
$30 + 2 + 40 + 8 = 32 + 40 + 8 = 72 + 8 = 80$

Bsp. 2: $32 + 48$ - Distributivgesetz
$30 + 40 + 2 + 8 = (3 + 4) \cdot 10 + (2 + 8) \cdot 1 = 7 \cdot 10 + 10 = 80$

Beim Zahlenrechnen werden die Zahlganzheiten benutzt, flexibel einsetzbare verschiedene Vorgehensweisen verwendet und in der Regel von „groß nach klein" (erst die Hunderter, dann die Zehner usw.) gerechnet. Individuelle Lösungswege sind möglich und durchaus erwünscht.

Beim **Ziffernrechnen** wird nur mit den Ziffern gerechnet, die auf Basis der Systematik des Stellenwertsystems verknüpft werden. Ziffernrechnen ist verkürzt, effizient und kann für alle beliebigen Zahlen verwendet werden. Es verleitet allerdings zur *„kognitiven Passivität"* (PLUNKETT, 1987, S. 44), weil während des Ausführens im Sinne eines entlastenden Vorgehens nicht über (Zahlvorstellungs-) Hintergründe nachgedacht werden muss und eine Reflexion anderer Lösungsmethoden irrelevant wird.

Wie im Lehrplan der Volksschule (2007, S. 153) verlangt, werden dazu im Unterricht meist festgelegte Handlungsabläufe (Algorithmen) vorgegeben, die das Kind der Reihe nach durchführen kann.

Zahlen- und Ziffernrechnen ergeben vorerst eine grobe Einteilung. RATHGEB-SCHNIERER (2006, S. 48) führt im Zusammenhang mit dem additiven Rechnen verschiedene Begriffe, wie z. B. „Rechentypen“ (WITTMANN, 1999, S. 88) „Rechenmethoden“ (SELTER, 2000a, S. 228; KRAUTHAUSEN, 1993, S. 189), „Rechenstrategien“, „Rechenwege“ und „flexibles Rechnen“ an, die in verschiedenen Quellen unterschiedlich verwendet werden, aber alle Zahlen- und Ziffernrechnen spezifizieren. In den folgenden Ausführungen wird die Begrifflichkeit „RECHENTYPEN“ von RATHGEB-SCHNIERER (2006) übernommen.

In Anlehnung an PLUNKETT (1987), KRAUTHAUSEN (1993), RADATZ, SCHIPPER, DRÖGE & EBELING (1998) werden vier Rechentypen der mathematikdidaktischen Literatur entnommen. Ein fünfter Rechentyp, nämlich *ziffernweise mündliches Rechnen*, ergibt sich aus der Arbeit mit den eigenen Daten.

3.1.1 Kopfrechnen

Das Kopfrechnen bezieht sich sowohl auf den kleinen Zahlenraum, in dem unter anderem das Automatisieren des Einspluseins verfolgt wird (KRAUTHAUSEN 1993, S. 90), als auch auf bestimmte Aufgaben eines erweiterten Zahlenraums (PLUNKETT 1987, S. 45). Der Automatisierung sollte die Entwicklung des Zahlverständnisses vorausgehen, also ein grundlegender Aufbau von Zahlvorstellungen (WITTMANN 1999, S. 92). Zahlvorstellungen sind Voraussetzung für verständnisgeleitetes Kopfrechnen. Dieses ist für Aufgaben erforderlich, bei denen nicht auf automatisierte Rechensätze zurückgegriffen werden kann und das Lösen die Zerlegung der Zahlen erfordert. Kennzeichnend für das Kopfrechnen ist die Ermittlung des Ergebnisses im Kopf, selbst wenn die Aufgabe nicht in einem Schritt gelöst werden kann, sondern die Zerlegung in Teilaufgaben notwendig ist (WITTMANN 1999, S. 89). Hierbei sind vielfältige Vorgehensweisen denkbar.

Beispiel 1: 8 – 3 = 5
Diese additive Grundaufgabe im Zahlenraum 20 sollte „sicher und schnell“ (Bildungsstandards, 2008, S. 24), ohne Zuhilfenahme von zusätzlichen heuristischen oder Zählstrategien gelöst werden. Vorangehend muss selbstverständlich ein Zahlenverständnis aufgebaut werden.

Beispiel 2: 48 – 23 = 25
Diese üblicherweise nicht automatisierte Rechenoperation wird in Teilschritten durchgeführt. Dafür stehen verschiedene Lösungsmethoden zur Verfügung, wie z. B. schrittweises Rechnen (48 – 20 = 28; 28 – 3 = 25) oder stellenweises Rechnen (40 – 20 = 20; 8 – 3 = 5; 20 + 5 = 25). Abgrenzend zum halbschriftlichen Rechnen werden die Lösungsschritte nicht verschriftlicht, sondern nur gedacht, im „Kopf“ gerechnet.

3.1.2 Halbschriftliches Rechnen

Wie das Kopfrechnen zählt auch das halbschriftliche Rechnen zum Zahlenrechnen. Es beruht auf einer schrittweisen Ermittlung des Ergebnisses, in dem Zahlen zerlegt, Rechengesetze genutzt und Teilschritte notiert werden (WITTMANN 1999, S. 88). Die informellen Rechenwege werden bei Aufgaben im größeren Zahlenraum, wenn die Grenzen des Kopfrechnens überschritten werden, notiert. Rechengesetze werden ausgenützt. Das Aufschreiben unterliegt definitionsgemäß keiner Standardisierung und kann, mathematisch richtig und den Rechengesetzen folgend, individuell gestaltet sein.

Beispiel 1:	**<u>23 + 35 = 25</u>**	**Beispiel 2:**	**<u>82 – 57 = 25</u>**
	20 + 30 = 50		82 – 50 = 32
	3 + 5 = 8		32 – 7 = 25
	50 + 8 = 58		

Das Notieren der Zwischenschritte ist allerdings problembehaftet, teilweise sogar hinderlich. Das Aufschreiben von Rechenwegen fällt den Kindern schwer, manche erzählen andere Rechenwege als sie notieren. Das Notieren auf mathematische korrekte Weise in Zeichensequenzen, wie z. B. die Gleichungsdarstellung, schränkt die Denkmöglichkeiten ein. Das hat zur Folge, dass die dem Kind zur Verfügung stehenden Rechenwegsnotationen entscheiden, welche Vorgangsweise das Kind verwendet. So kann es vorkommen, dass das Kind sehr wohl über eine denkökonomische Lösungsmethode verfügt, sie aber nicht notieren kann. Infolgedessen wählt das Kind die Methode, die es notieren kann. Das bedeutet, dass zur Verfügung stehende Notationen das Denken der Kinder festlegen. (RATHGEB-SCHNIERER, 2006, S. 288; SCHÜTTE, 2004, S. 140ff.)

In Österreich hat das Notieren der Rechenwege geringe Tradition. In den Schulbüchern ist es wenig zu finden und im Unterricht wird es kaum mit Nachdruck durchgeführt. Österreichische Kinder lösen bis zur Einführung der schriftlichen Rechenverfahren additive Rechenoperationen großteils über Kopfrechnen. Infolgedessen besteht in Österreich kaum die Gefahr, dass durch Rechenwegsnotationen, die im Unterricht vorgegeben und teilweise auch eingeübt werden, Denkwege verloren gehen.

3.1.3 Rechnen mit dem Taschenrechner

Das Rechnen mit dem Taschenrechner wird von WITTMANN (1999, S. 89) als *„zeitgemäße Form des mechanischen Rechnens“* bezeichnet. Im österreichischen Lehrplan der Volksschule ist das Rechnen mit dem Taschenrechner nicht vorgesehen. Deshalb wird im Folgenden nicht weiter auf diesen Rechentyp eingegangen.

3.1.4 Schriftliches Rechnen

Unter schriftlichem Rechnen werden in der deutschsprachigen Didaktik und von vielen Didaktikern anderer Länder die festgelegten, schriftlichen Rechenverfahren bzw. Algorithmen verstanden. Algorithmen sind eindeutige Ketten von Handlungsschritten, die immer gleich hintereinander ablaufen. Algorithmen können ganz genau beschrieben werden, so dass ein Mensch oder eine Maschine danach vorgehen kann. Im Gegensatz zu den halbschriftlichen Strategien sind bei schriftlichen Rechenverfahren der Lösungsweg, die Sprechweise und die Notation festgeschrieben. Individuelles Lösen wird nicht angestrebt. Um eine Einheitlichkeit zu erreichen, sind die schriftlichen Rechenverfahren vorgegebene Normalverfahren. Meist wird mit dem Begriff des Normalverfahrens zusätzlich der Anspruch verbunden, unter verschiedenen Wegen, das „denkökonomischte“ oder das „beste“ Verfahren darzustellen. Im Mittelpunkt steht nicht mehr das Rechnen mit Zahlen, sondern das Rechnen mit Ziffern an bestimmten Stellen.

Die Einsicht in das Verfahren wird sowohl im Lehrplan der Volksschule (2007, S. 153) als auch in den Bildungsstandards (2008, S. 24) angestrebt, ist jedoch bei der Durchführung nicht unbedingt erforderlich. Es reicht das schematische Abarbeiten der Regeln und Verfahrensvorschriften. Schriftliche Rechenverfahren vermitteln keine neuen Einsichten oder Erkenntnisse. Das Vermitteln von Fertigkeiten und das Mechanisieren von Techniken stehen im Vordergrund.

Unterschiedlich zur Stellungnahme von PADBERG (2005, S. 224), der eine Öffnung der schriftlichen Verfahren in den Lehrplänen der Bundesrepublik Deutschland beschreibt, wird in dieser Arbeit nur das im Lehrplan der Volksschule (2007, S. 153) vorgeschriebene Normalverfahren als „*Schriftliches Rechnen*" definiert. Kategorienleitend ist das Denken, unabhängig von der Notation. Ob die verknüpften Zahlen nebeneinander oder untereinander stehen, ist unerheblich. Wichtig ist, dass die Ziffern in den Stellenwerten im vorgeschriebenen Algorithmus (z. B. zuerst die Einer, dann die Zehner) verknüpft werden. Andere Denkweisen in Ziffernform werden dem „*Ziffernweise mündlichen Rechnen*" zugeordnet.

3.1.5 Ziffernweise mündliches Rechnen

Im Gegensatz zum schriftlichen Rechnen, das in der Vorgangsweise normiert ist, werden beim ziffernweise mündlichen Rechnen die Ziffern individuell, entsprechend den Rechengesetzen verknüpft. Ausgehend vom Analogieschluss, wie beim stellenweisen Rechnen (siehe 3.2.1 Lösungsmethoden beim Zahlenrechnen) üblich, dass, gleich welcher Stellenwert, das verknüpfte Ziffernergebnis ident ist, werden die beim Zahlenrechnen verwendeten Strategien auch beim Ziffernrechnen angewendet. Dieses Vorgehen hat keinen algorithmischen Charakter, sondern ändert sich, je nach Aufgabenstellung.

Ziffernweise mündliches Rechnen ist nicht ein im Unterricht thematisierter Rechentyp, sondern wird informell von den Kindern durchgeführt, indem sie Ratschläge von Betreuenden bei Hausaufgaben oder eigene Strukturierungen von Veranschaulichungen mit Sicht auf die Ziffer interpretieren.

Voraussetzung für das korrekte ziffernweise mündliche Rechnen ist, dass die Ziffern an der jeweiligen Stelle stellenwertadäquat verwendet werden. Die Ziffer an der Zehnerstelle ist zehnmal so viel wert als die Ziffer an der Einerstelle und muss in der operativen Verknüpfung als $x \cdot 10$ eingebracht und die Einerstelle dazu addiert werden.

Der Blick auf die Ziffern kann leicht auch reduziert gesehen werden, indem jede Ziffer in den einzelnen Stellenwerten nicht als ein Bestandteil einer Zahl, sondern als eigene Zahl mit Einerstellenwert verstanden wird. Eine Ziffer steht im Verständnis dieser Konzeption weiter links und die andere Ziffer weiter rechts, dies hat allerdings keinerlei Auswirkung auf die Verknüpfung. FUSON, WEARNE, HIEBERT, MURRAY, HUMAN, OLIVIER, CARPENTER & FENNEMA (1998, S. 138) sehen diesen Zugang als Sackgasse, weil sich daraus kein Zahlverständnis aufbauen kann. Nachfolgend werden die beiden Denkweisen anhand eines Beispiels beschrieben.

Beispiel: 82 – 57 = 25

Konzeption der Ziffer im Stellenwert als einzelne Zahl	Konzeption der Ziffer, abhängig vom Stellenwert
(1) <u>82 – 57 = 30</u> 8 – 5 = 3 2 – 7 = 0 Vorgehen/Denkschritte: 1. Schritt: Blick auf die Zehner, die beiden Ziffern werden verknüpft.	<u>82 – 57 = 25</u> 12 – 7 = 5 7 – 5 = 2 Vorgehen/Denkschritte: 1. Schritt: Blick auf die Einer, ob im Minuenden oder im Subtrahenden die größere Ziffer steht.

2. Schritt: Blick auf die Einer, die beiden Ziffern werden verknüpft. 3. Schritt: Ergebnisziffer von Einer und Zehner werden aneinandergefügt. Es ist unbedeutend, ob mit den Einern oder mit den Zehnern begonnen wird. (2) Oft wird die Subtraktion kommutativ interpretiert, dadurch entsteht folgende (mathematisch nicht korrekte) Vorgangsweise: 82 – 57 = 35 8 – 5 = 3 2 – 7 = 7 – 2 = 5	2. Schritt: 1 Zehner wird entbündelt, daher nicht 8, sondern nur 7 Zehner. 3. Schritt: 12 – 7 = 5 4. Schritt: 7 – 5 = 2 5. Schritt (ident mit Ziffern im Stellenwert als einzelne Zahl): Ergebnis von Einer und Zehner werden aneinandergefügt.

Ob jemand beim *ziffernweise mündlichen Rechnen* eine reduzierte Konzeption der Ziffer im Stellenwert als einzelne Zahl oder ein Verständnis von Zehnern und Einern hat, kann nur bei Rechnungen mit Zehnerüberschreitung erkannt werden. Bei Rechnungen ohne Zehnerüberschreitung ist das unterschiedliche Vorgehen vordergründig durch Beobachtung oder im Interview nicht erkennbar.

Problematisch ist der Zugang „*Konzeption der Ziffer im Stellenwert als einzelne Zahl“,* weil die für die mathematische Kompetenz wichtige Einsicht in die Strukturen fehlt. Die Konzeption des Stellenwertsystems steht nicht zur Verfügung. Daher können manche Rechenoperationen nicht richtig gedeutet und deshalb auch nicht mathematisch einwandfrei gerechnet werden.

3.1.6 Einsatz und Erfolgsquoten der einzelnen Rechentypen

SELTER (2000a) untersucht die Vorgehensweisen von Volksschülern bei Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 1000. Seine Forschungsfragen betreffen unter anderem die von Kindern ausgewählten Rechentypen (Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliches Rechnen) und den Erfolg beim Lösen der Aufgaben. Die Studie wurde mit 298 Schülern der dritten Schulstufe durchgeführt. Zur Beobachtung von Veränderungen fand die Datenerhebung zu drei unterschiedlichen Zeitpunkten statt: vor Einführung der schriftlichen Rechenverfahren, nach deren Einführung sowie nach den Sommerferien zu Beginn der 4. Schulstufe. Es wurde ein Rechentest mit allen Schülerinnen und Schülern als auch Einzelinterviews mit ausgewählten Schülerinnen und Schülern durchgeführt. Der Rechentest umfasste 12 Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum 1000. Er wurde während der Unterrichtszeit durchgeführt. Bei den Interviews bearbeiteten die Kinder dieselben Aufgaben wie im Rechentest, wobei sie gleichzeitig nach ihrer Vorgangsweise gefragt wurden. Die Interviews wurden jeweils einen Tag nach dem Rechentest durchgeführt.

Nach der Einführung der schriftlichen Rechenverfahren rechnen die Schülerinnen und Schüler nicht mehr mit den Zahlen, sondern mit den Ziffern. Die Dominanz der schriftlichen Algorithmen ist nicht aufgabenspezifisch, sondern lässt sich über alle Aufgaben weg beobachten (SELTER, 2000a). Schülerinnen und Schüler setzen diese im Zahlenraum 1000 mit Abstand am häufigsten ein, mit Anteilen zwischen 53 % und 60 %. Das halbschriftliche Rechnen verschwindet fast völlig (mit Anteilen von in der Regel weniger als 10 %), während das Kopfrechnen weiterhin einen vergleichsweise hohen Anteil (rund 30 %) hält. Bei den Minuslösungen sind immer etwas weniger Kopfrechenlösungen.

3.2 Addition und Subtraktion im Schulbuch

Innerhalb der einzelnen Rechentypen können Additionen und Subtraktionen auf viele verschiedene Arten gelöst werden. Nachfolgend werden Lösungsmethoden von Zahlenrechnen und Ziffernrechnen vorgestellt, wie sie im Schulbuch dargestellt sind, das die beiden Klassen verwendeten.

3.2.1 Lösungsmethoden beim Zahlenrechnen

In der mathematikdidaktischen Literatur des deutschsprachigen Raums finden sich zu den Lösungsmethoden beim Zahlenrechnen unterschiedliche Klassifizierungen. Alle Klassifizierungen enthalten stellenweises und schrittweises Rechnen (WITTMANN & MÜLLER, 1990, S. 84; RADATZ, SCHIPPER, DRÖGE & EBELING, 1998, S. 43; FRANKE & LEHMANN, 2005; PADBERG, 2005, S. 165ff). Nachfolgend werden die zwei Lösungsmethoden vorgestellt und durch Darstellungen aus dem Schulbuch ergänzt.

Schrittweises Rechnen

Bei dieser Lösungsmethode wird nur eine Zahl zerlegt.

Charakteristisch bei der Addition ist die Zerlegung des ersten oder – normalerweise – des zweiten Summanden und das anschließende schrittweise Rechnen. Die Zerlegung ist auf vielfältige Weise möglich (Zerlegung des ersten bzw. des zweiten Summanden, Beginn der Rechnung beim kleinsten bzw. größten Stellenwert, Ergänzung des einen Summanden zum nächsten vollen Zehner oder Hunderter plus ev. weitere schrittweise Zerlegung). Die Strategie beruht auf der Gültigkeit des Assoziativgesetzes der Addition [39 + 48 = 39 + (40 + 8) = (39 + 40) + 8 = 87].

- **39 + 48**

39 + 40 = 79	39 + 8 = 47	39 + 1 = 40	30 + 48 = 78	9 + 48 = 57
79 + 8 = 87	47 + 40 = 87	40 + 47 = 87	9 + 78 = 87	30 + 57 = 87

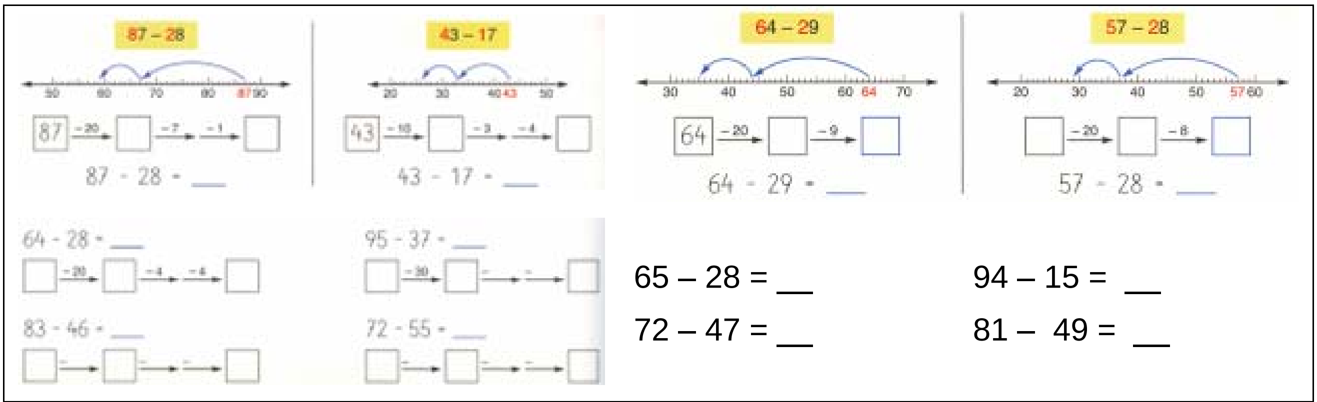


Abbildung 1: Schrittweises Rechnen, dargest. am Zahlenstrahl (AG Mathematik, 2003c, S. 46f.)

Bei der Subtraktion wird im Allgemeinen nur der Subtrahend zerlegt. Ähnlich wie bei der Addition, nur in der Anwendung weniger variationsreich, sind verschiedene Vorgangsweisen möglich. Mathematischer Hintergrund dieser Strategie ist die Regel zum Auflösen von „Minusklammern“ [82 – 57 = 82 – (50 + 7) = (82 – 50) – 7 = 25] (PADBERG, 2005, S. 171).

- **82 – 57**

82 – 50 = 32	82 – 7 = 75	82 – 2 = 80
32 – 7 = 25	75 – 50 = 25	80 – 55 = 25

Schrittweises Rechnen hat den Vorteil, dass immer mit dem bei der Teiloperation erhaltenen Ergebnis weiter gerechnet wird und beim letzten Rechenschritt direkt das Endergebnis präsent ist.

Im Schulbuch der beiden Klassen ist *Schrittweises Rechnen* implizit das Normalverfahren, das zur Erklärung herangezogen wird, entweder mit Hilfe des Zahlenstrahls (Abbildung 1) oder mit Hilfe von Operatoren (Abbildung 2).

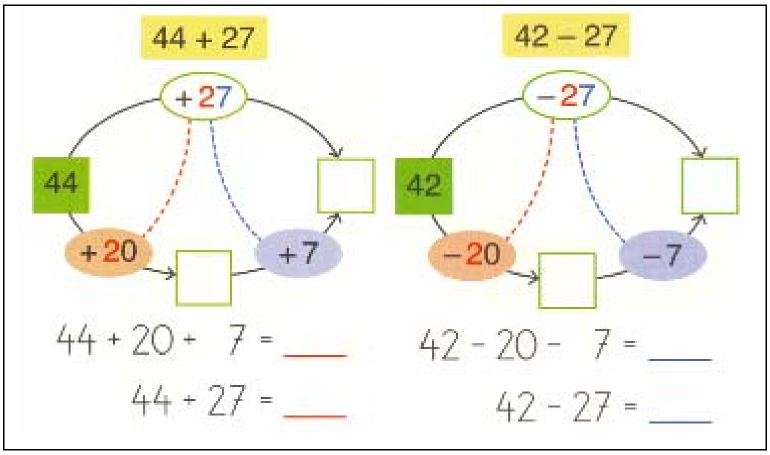


Abbildung 2: Schrittw. Rechnen, dargest. mit Operatoren (AG Mathematik, 2003b, S. 51; S. 55)

Stellenweises Rechnen

Bei dieser Lösungsmethode – in der Literatur wird sie oft auch *Stellenwerte extra* genannt – werden jeweils beide Zahlen in ihre Stellenwerte zerlegt.

Stellenweises Rechnen steht in engem Zusammenhang zur schriftlichen Addition. Sie erfordert größere Gedächtnisleistungen als andere Lösungsmethoden. Zuerst werden die beiden Teiloperationen berechnet, die dann addiert werden. Wenn das Berechnen der einzelnen Teilschritte noch Schwierigkeiten bereitet, können leicht die schon berechneten Teilergebnisse, die zum Ende noch addiert werden müssen, vergessen sein (RADATZ, et al. 1990, S. 44).

Die Strategie beruht auf der Gültigkeit des Assoziativ- und Kommunikativgesetzes bei der Addition [39 + 48 = (30 + 7) + (40 + 8) = (30 + 40) + (7 + 8)= 87]

- **39 + 48**

30 + 40 = 70	9 + 8 = 17
9 + 8 = 17	30 + 40 = 70
70 + 17 = 87	17 + 70 = 87

Stellenweises Rechnen bei der Subtraktion verläuft bei einem größeren Teilminuenden als Teilsubtrahenden analog zur Addition ab, wie zum Beispiel bei

- **48 – 23**

40 – 20 = 20	8 – 3 = 5
8 – 3 = 5	40 – 20 = 20
20 + 5 = 25	5 + 20 = 25

In den Fällen, in denen der Teilminuend kleiner ist als Teilsubtrahend, ist eine spezielle Interpretation erforderlich, sonst ergeben sich negative Zahlen. Kontrovers wird diskutiert, ob dieser Zugang im Unterricht thematisiert werden soll. WITTMANN und MÜLLER (1990) schlagen eine spezielle Schreibweise vor. Die Zeile „*2 – 7*“ bewirkt nur, dass vom Zwischenergebnis 30 nur mehr 5 abzuziehen sind. RADATZ et al. (1998) raten davon ab.

- **<u>82 – 57</u>**
  80 – 50
  2 – 7

Stellenweises Rechnen wird im Schulbuch, das in den beiden Klassen verwendet wurde, als Verfahren nicht direkt angeboten. Allerdings bietet sich durch das verwendete Anschauungsmaterial, nämlich den Zehnerstangen und den Einerwürfeln, von der Struktur her ein stellenweises Vorgehen an. Ohne zu „lernen“ ist für die Kinder das stellenweise Rechnen durch die Veranschaulichung ein verständliches Verfahren.

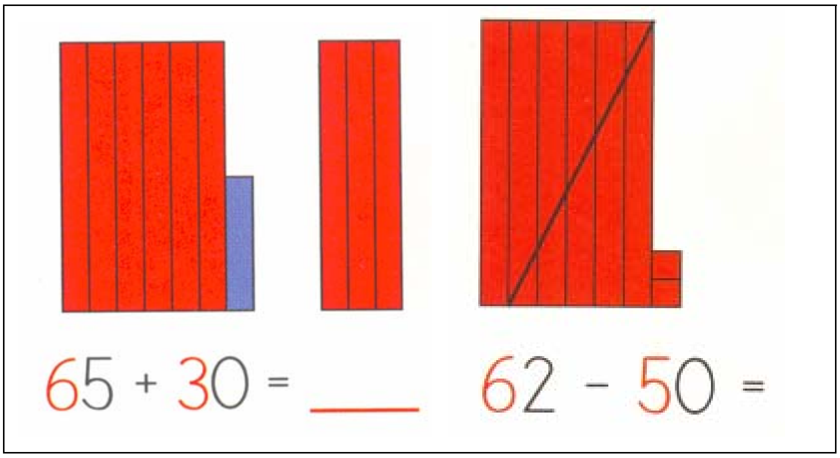


Abbildung 3: Zehnerstangen und Einerwürfel (AG Mathematik, 2003b, S. 50; S. 54)

Das in den beiden Klassen verwendete Schulbuch bietet bei Rechnungen mit Zehnerübergang bevorzugt *Schrittweises Rechnen* an, indem zuerst die Zehner, dann die Einer subtrahiert werden. Andere Lösungsmethoden werden nicht explizit angeführt. Additives Ergänzen wird oft thematisiert, allerdings nie ausdrücklich in Zusammenhang mit dem Subtrahieren gebracht.

3.2.2 Lösungsmethoden beim Ziffernrechnen

Ziffernrechnen ist stellenweises Rechnen mit den Ziffern in den Stellenwerten.

Bei der schriftlichen Addition gibt es weltweit im Wesentlichen nur ein Verfahren (PADBERG, 2005, S. 221), das in Abbildung 4 zu sehen ist.

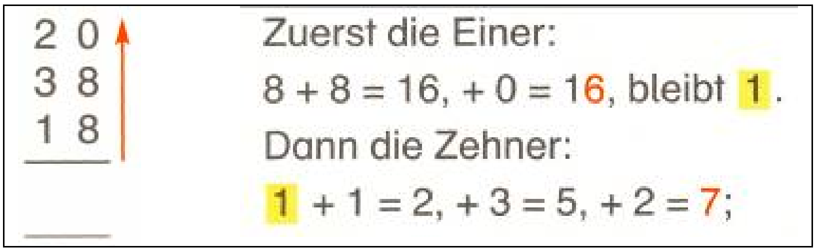


Abbildung 4: Schriftliche Addition (AG Mathematik, 2003a, S. 65)

Ganz anders ist dagegen die Situation bei der schriftlichen Subtraktion. Hier gibt es verschiedene, stark unterschiedliche Verfahren.

Die gebräuchlichsten Subtraktionsverfahren lassen sich anhand von zwei Gesichtspunkten einteilen, nämlich durch die Art der Berechnung der Differenz und durch die Art der Durchführung des Übertrags.

Die Art der Berechnung der Differenz kann durch

- Abziehen (Wegnehmen), also in Minussprechweise oder durch
- Ergänzen (Hinzufügen), also in Plussprechweise durchgeführt werden.

Die Art der Durchführung des Übertrags kann durch

- Entbündeln, also durch „Ausborgen“ einer Einheit aus dem nächst höheren Stellenwert oder durch
- Gleichsinniges Verändern sowohl des Minuenden wie des Subtrahenden, also durch Erweitern, in dem +10 und im nächst höheren Stellenwert +1 dazugefügt wird oder durch
- Auffüllen des Subtrahenden zum Minuenden (sogenannte Auffülltechnik) durchgeführt werden. (PADBERG, 2005, S. 222ff.)

Durch Kombination gibt es fünf verschiedene mögliche Verfahren. In Österreich ist das Ergänzungsverfahren kombiniert mit dem gleichsinnigen Verändern des Minuenden und des Subtrahenden das Normalverfahren (Abbildung 5).

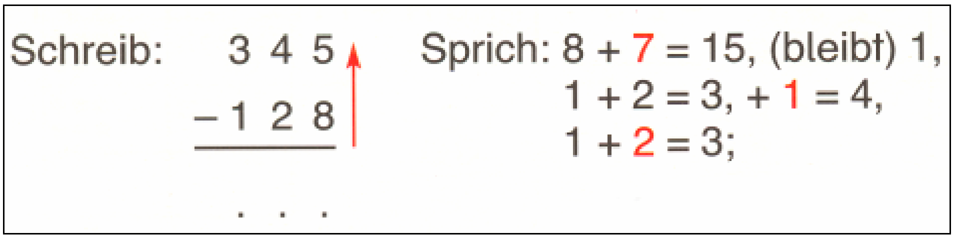


Abbildung 5: Schriftliche Subtraktion (AG Mathematik, 2003b, S. 6)

Ein in anderen Ländern übliches Normalverfahren ist Abziehen, kombiniert mit Entbündeln. Vorteil dieses Verfahrens ist, dass fast 80 % der Kinder ein begründendes Verständnis erreichen, während der entsprechende Anteil bei der Erweiterungs- und Auffülltechnik nur um 10 % liegt (MOSEL-GÖBEL (1988). Das Verständnis von Abziehen, kombiniert mit Entbündeln wird in dieser Arbeit dem *ziffernweise mündlichen Rechnen* zugeordnet, weil es nicht das Normalverfahren in Österreich ist.

3.3 Fragestellungen

Folgende Fragen sollen in dieser Arbeit beantwortet werden:

- Wie häufig werden die Rechentypen Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich), Ziffernrechnen (schriftlich algorithmisch) und Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich) von der zweiten bis zur vierten Schulstufe im Hunderterraum/Tausenderraum eingesetzt?
- Gibt es Unterschiede im Einsatz der Rechentypen zwischen dem Zahlenraum 100 und dem Zahlenraum 1000?
- Gibt es rechenartspezifische Unterschiede?
- Gibt es aufgabenspezifische Unterschiede?
- Gibt es Unterschiede in den Erfolgsquoten einzelner Rechentypen?

4 MÄDCHEN UND BUBEN IM MATHEMATIKUNTERRICHT

4.1 Leistungsentwicklung bei Mädchen und Buben

In internationalen Vergleichsstudien schneiden in der Altersklasse der Fünfzehnjährigen die Burschen in Mathematik im Durchschnitt besser ab als ihre weiblichen Alterskolleginnen. Bei PISA 2006 ist die Tendenz etwas reduziert und nur mehr in einem Teil der Länder zu beobachten. In Österreich bestehen allerdings nach wie vor Unterschiede zu Gunsten der Burschen. Österreich hat sogar die größte bei PISA 2006 beobachtete Differenz zwischen Burschen und Mädchen. (SCHREINER, 2007, S. 55).

In den wenigen für den Bereich der Sechs- bis Zehnjährigen vorliegenden empirischen Untersuchungen, die sich auf die mathematischen Leistungsunterschiede zwischen Buben und Mädchen beziehen, ist der Leistungsunterschied erfreulicherweise nicht eindeutig in den Ergebnissen, anders als bei den Fünfzehnjährigen.

Die TIMS-Studie 1995, an der auch Österreich mit der Elementarstufe (4. Schulstufe) teilnahm (GÖTZ & REICHEL, 1998, S. 1), weist tendenziell höhere Leistungen bei den Buben als bei den Mädchen auf. Bei dieser Studie gibt es kein Land, in dem die Mädchen signifikant bessere Leistungen erreichten (MULLIS, MARTIN, FIERROS, GOLDBERG, STEMLER, 2000, S. 8f.). Die TIMS-Studie 2003 zeigt ein mehr ausgeglichenes Bild. In manchen Ländern weisen die Buben eine signifikant höhere Leistung auf, in anderen die Mädchen (MULLIS, MARTIN, FOY, 2005, S. 11). Aktuelle österreichische Survey-Studien-Daten stehen erst mit den Ergebnissen von TIMSS 2007, die voraussichtlich Ende 2008 veröffentlicht werden[1], zur Verfügung.

TIEDEMANN und FABER (1994a) konnten im Vorschulalter keine geschlechtsbezogenen Differenzen in den numerischen Lernvoraussetzungen feststellen. In den ersten beiden Jahren zeigten die Mädchen auf der Basis von Tests und Noten bessere Leistungen. Mit zehn Jahren waren die Leistungen zwischen Buben und Mädchen gleich. Ebenso stellten LACHANCE und MAZZOCCO (2006) in einer vierjährigen Längsschnittstudie in einem amerikanischen Schulbezirk mit einer Stichprobe von über 200 Schülerinnen und Schülern, RATZKA (2003, S. 149) mit TIMSS-Daten aus Deutschland und ELIA (2007) in Zypern keinerlei geschlechtsspezifische Unterschiede fest. Andere Studien belegen die Überlegenheit der Mädchen in dieser Altersstufe (BRANDON, NEWTON & HAMMOND, 1985). Demgegenüber verweisen Befunde aus Längsschnittsstudien auch die Überlegenheit der Buben schon in dieser Altersgruppe auf, die sich im Laufe der Grundschulzeit verringern. Dies gilt sowohl für die Noten als auch für Testleistungen (HELMKE, 1997, S. 213; STERN, 1998). KIMBALL (1989) beschreibt, dass Geschlechtsunterschiede eher zugunsten der Buben ausfallen, wenn Tests als Leistungskriterium verwendet werden. Werden Noten als Leistungskriterium verwendet, treten keine Differenzen auf oder sie fallen zugunsten der Mädchen aus.

Anders als in der Sekundarstufe 1 kann derzeit in der Schule der Sechs- bis Zehnjährigen nicht generell von einer geschlechtstypischen Abhängigkeit der Leistungsentwicklung gesprochen werden.

---

[1] Quelle: http://www.iea-austria.at/timss/projekt.html#block6 [4. Juli 2008]

4.2 Fähigkeitsselbstkonzepte bei Mädchen und Buben

Eindeutig ist der Befund, wonach sich Buben und Mädchen schon am Ende der vierten Schulstufe in ihrem mathematischen Fähigkeitsselbstkonzept unterscheiden.

Buben weisen ein höheres Zutrauen in ihre eigenen mathematischen Fähigkeiten auf als Mädchen (TIEDEMANN & FABER, 1994a). Mädchen geben vergleichsweise häufiger an, Schwierigkeiten in Mathematik zu haben. Diese negativen Selbsteinschätzungen entsprechen nicht schlechteren objektiven Leistungen. Ungeachtet der gleichwertigen Leistungen bewerten Mädchen dieses Schulfach als schwieriger.

Selbstbild, Selbstkonzept, verschiedene Attributionsmuster und das soziale Umfeld der Schülerinnen und Schüler spielen eine große Rolle, was das Selbstvertrauen in mathematische Leistungsfähigkeit betrifft. Mädchen und Frauen schreiben Erfolge meist variablen Ursachenfaktoren, wie z. B. dem Zufall, zu, Misserfolge indessen dem stabilen Faktor mangelnde Fähigkeiten. Bei den Buben ist es genau umgekehrt. Erfolge werden dem stabilen Faktor Begabung zugeordnet, Misserfolg wird als variabler Faktor angesehen, wie etwa Pech, Vorurteil des Lehrers, zu wenig Lernaufwand. (TIEDEMANN & FABER, 1994b, S. 34f.)

Es stellt sich die Frage, wie die zu beobachteten Geschlechtsunterschiede im Fähigkeitsselbstkonzept zu klären sind. Als eine wesentliche Determinante von Fähigkeitsselbstkonzepten ist nach HELMKE (1992) die bisherige Leistung der Person anzusehen. Wer gute mathematische Leistungen erbringt, entwickelt zunehmend ein positives Selbstbild eigener mathematische Fähigkeiten. Auch die Einschätzungen von Lehrer/innen und Eltern haben Einfluss auf das Fähigkeitsselbstkonzept. Mädchen, die im mittleren oder unteren Leistungsbereich liegen, können im Urteil der Lehrpersonen weniger gut logisch denken als Buben mit vergleichbaren Leistungen. Die Lehrkräfte erwarten bei Mädchen bei erhöhter Anstrengung geringere Leistungsverbesserungen im Mathematikunterricht als bei Buben. Erwartungswidrige Leistungseinbrüche werden bei Mädchen eher auf mangelnde Fähigkeiten und weniger auf fehlende Anstrengung zurückgeführt als bei den Buben (TIEDEMANN, 1995, S. 153). Zum anderen geben Eltern mit traditionellen Rollenvorstellungen ihren Töchtern weniger Unterstützung darin, sich dem mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Bereich zuzuwenden. Entsprechende Unterstützung von Seiten der Eltern wäre allerdings eine wichtige Voraussetzung für eine Veränderung. (JAHNKE-KLEIN, 2001, S. 16)

TIEDEMANN (2000) zeigt, dass sowohl die bisherigen Noten als auch die Lehrer/innen/einschätzungen das Fähigkeitsselbstkonzept beeinflussen. Trotz gleicher realer Leistung haben die Buben ein höheres Fähigkeitsselbstkonzept in Mathematik als die Mädchen. Die Lehrerinnen und Lehrer schätzten die Fähigkeiten der Buben höher ein als die der Mädchen.

4.3 Wie sieht mich die Lehrerin / der Lehrer? – Perzeptionen von Fähigkeitsselbsteinschätzungen

Dies erklärt noch immer nicht die Unterschiede, denn, auch wenn Lehrpersonen die Begabung von Mädchen und Buben gleich einschätzen, meinen Mädchen, dass sie weniger begabt sind. Die eigene Sicht des Kindes, wie das Kind sieht, wie es die Lehrperson bzw. die Eltern bezüglich mathematischen Könnens einschätzt (perzeptive Selbsteinschätzung) rückt in den Blickpunkt. Selbst wenn Lehrpersonen gegenüber Buben und Mädchen gleiche Erwartungen hegen und gleiches Verhalten an den Tag legen, können Schülerinnen im Vergleich zu Schülern zu unterschiedlichen Sichtweisen kommen. (DICKHÄUSER & STIENSMEIER-PELSTER, 2003, S. 188) Dies spricht eher dafür, dass die Ursachen nicht primär bei den Lehrpersonen zu suchen sind, sondern eher auf andere Sozialisationsagenten, wie z. B die Eltern oder die Peers zurückgehen (BOSSONG, 2006, S. 270).

Damit erscheint es sinnvoll, bei Interventionsprogrammen nicht nur das Lehrverhalten zu kontrollieren, sondern auch zu beobachten, wie *„Lehrverhalten von Schülerinnen und Schülern interpretiert wird und welche Perzeptionen von Fähigkeitsfremdeinschätzungen die Schülerinnen und Schüler vornehmen“*. (DICKHÄUSER & STIENSMEIER-PELSTER, 2003, S. 189). Veränderte Arten von Leistungsfeststellungen und Leistungsbeurteilungen, die eine individuelle Bezugsnorm forcieren, erhöhen das Fähigkeitsselbstkonzept und zeigen Tendenzen, die Enge zwischen Leistung und Selbstkonzept aufzubrechen (KAMMERMEYER und MARTSCHINKE, 2003, S. 499).

4.4 Unterschiedliche Vorgangsweisen von Buben und Mädchen

FENNEMA, CARPENTER, JACOBS, FRANKE und LEVI, L (1998) interviewten 44 Buben und Mädchen über einen Zeitraum von drei Jahren hinweg. Sie konnten bei Routineaufgaben kaum Differenzen bezüglich der Erfolgsquoten feststellen, wohl aber einen Unterschied im Entscheidungsverhalten. Die Mädchen tendierten nämlich dazu, die Standardmethoden zu verwenden, während die Buben häufiger Gebrauch von eigenen, nicht algorithmischen Vorgehensweisen machten.

HORNE (2003) konnte zeigen, dass die Unterschiede in den Rechenstrategien zwischen Buben und Mädchen vom fünften bis zum achten Lebensjahr sich immer mehr unterscheiden. Mädchen verwenden im fünften und sechsten Lebensjahr mehr Zählstrategien als Buben. Später bevorzugen Mädchen vertraute und risikovermeidende Vorgangsweisen. Buben hingegen wählen mehr heuristische, abgeleitete Strategien.

Bedingt durch das niedrigere Fähigkeitsselbstkonzept trauen Mädchen sich weniger, die eher den Zahlbegriff förderlichen Lösungsmethoden einzusetzen. Um ja nicht einen Fehler zu begehen und dadurch vermutlich von der Lehrerin als nicht mehr so „sorgfältig“, „gewissenhaft“, gescheit“ und „klug“ zu gelten, verwenden Mädchen sichere, dadurch meist auch aufwändigere Vorgangsweisen. Sie verspielen durch dieses zaghafte Vorgehen wichtige Erfahrungen, tiefer in die Strukturen der Mathematik einzudringen.

4.5 Fragestellungen

Welche Rechentypen verwenden Buben, welche verwenden Mädchen?

Welche Erfolgsquote ergibt sich in Zusammenhang mit Rechentypen und Rechenarbeiten bei Buben, welche bei Mädchen?

5 ABLAUF UND AUSWERTUNG DER UNTERSUCHUNG

Im Rahmen der IMST3-Projekte *"Förderung leistungsstarker Kinder im Klassenverband"* im Schuljahr 2004/2005, *"Studierende lernen von und mit leistungsstarken Kindern"* im Schuljahr 2005/2006 und *"Studierende und Kinder lernen voneinander Mathematik"* im Schuljahr 2006/2007 wurden zu Beginn und am Ende des jeweiligen Schuljahres die Vorgehensweisen bei additiven Rechenoperationen von ca. 50 Kindern erhoben. Diese Daten stehen für dieses Projekt zur Verfügung.

5.1 Rahmenbedingungen

Die Untersuchung bezieht sich auf Kinder von zwei Klassen, die sechsmal, jeweils zu Beginn und am Ende der 2., 3. und 4. Schulstufe von Studierenden befragt bzw. beobachtet wurden.

Insgesamt nahmen von Beginn der zweiten Schulstufe bis zum Ende der vierten Schulstufe 53 Schülerinnen und Schüler an der Lernstandserhebung teil. Manche kamen in einer höheren Schulstufe durch Umzug oder Klassenwiederholung dazu, andere fielen aus den genannten Gründen aus. Durchgehende Daten von der zweiten Schulstufe bis zur 4. Schulstufe stehen von 44 Kindern zur Verfügung. Davon sind 25 Buben und 19 Mädchen (Tabelle 1). Aus Gründen der Vergleichbarkeit werden nur die Ergebnisse dieser 44 Kinder ausgewertet.

	Gesamtdaten			Längsschnittdaten		
	Buben	Mädchen	gesamt	Buben	Mädchen	gesamt
Klasse a	16	10	26	13	9	22
Klasse b	14	13	27	12	10	22
	30	23	53	25	19	44

Tabelle 1: Übersicht über die Anzahl der Kinder, die an der Lernstandserhebung teilnahmen

In den zwei Klassen wurde dasselbe Schulbuch benutzt (Kapitel 3.2). Es gab keinen Wechsel der Lehrperson, die beiden Lehrerinnen unterrichteten die Kinder von der ersten bis zur vierten Schulstufe.

Ideal konnte die räumliche Struktur der Institutionen für die Pflichtschullehrerausbildung genutzt werden. Die Seminarräume für die Studierenden befinden sich in unmittelbarer Nähe der beiden Klassenräume für die Volksschulkinder. Dadurch war es möglich, dass im Rahmen einer Studienveranstaltung Studierende mit Kindern einer Volksschulklasse während des Unterrichts arbeiten konnten.

5.2 Aufgaben

Kriterien zur Auswahl der Aufgaben waren der Entwicklungsstand der Kinder, mathematische Strukturierungen und bereits eingesetzte Beispiele aus publizierten Untersuchungen, um ev. vergleichen zu können.

Bewusst wurden reine Zahlenaufgaben und keine Textaufgaben eingesetzt, damit sich die Kinder auf die unmittelbare Rechenaufgabe konzentrieren. Dem Entwicklungsverlauf entsprechend wurden manche Rechnungen durchgehend angeboten, andere kamen dazu und andere wieder weg. Aufgaben im Zahlenraum 100 waren schwerpunktmäßig auf der zweiten Schulstufe. Sie wurden in der dritten und vierten Schulstufe reduziert eingesetzt. Die über fünf bzw. sechs Zeitpunkte eingesetzten Aufgaben aus dem Zahlenraum 100 wurden in die Auswertung aufgenommen. Aufgaben aus dem Zahlenraum 1000 wurden ab der dritten Schulstufe angeboten. Die Aufgaben im Zahlenraum 1000 sind schwerpunktmäßig so ausgewählt, dass sich eine Lösung über das Erkennen von mathematischen Strukturen anbietet.

Insgesamt werden elf verschiedene Rechnungen analysiert (Tabelle 2).

	Aufgabe	Typisierung	10er- bzw. 100er-Übergang	Mögliche Hilfsaufgaben	Kontext in der Literatur
Zahlenraum 100	23 + 35	ZE + ZE	0		FRANKE & LEHMANN, 2005: 34 + 54 / 36 + 23 BENZ, 2005, S. 103: 25 + 43
	48 – 23	ZE - ZE	0		BENZ, 2005, S. 103: 68 - 25
	39 + 48	ZE + ZE	1	40 + 48; - 1	FRANKE & LEHMANN, 2005: 39 + 38 / 37 + 58 BENZ, 2005, S. 103: 46 + 29
	82 – 57	ZE - ZE	1		BENZ, 2005, S. 104: 71 - 69
	23 + 9	ZE + E	1	23 + 10; - 1	FRANKE & LEHMANN, 2005: 35 + 8 / 23 + 9
	74 – 8	ZE - E	1		
Zahlenraum 1000	243 + 329	HZE + HZE	1		GRASSMANN et al., 1998, S. 57: 243 + 329
	391 – 48	HZE - ZE	1		
	784 – 199	HZE - HZE	2	784 – 200; +1	GRASSMANN et al., 1998, S. 57: 784 - 199
	701 – 698	HZE - HZE	2	698 + _ = 701	SELTER, 2000, S. 233: 701 - 698
	527 + 399	HZE + HZE	2	527 + 400; - 1	SELTER, 2000, S. 233: 527 + 399

Tabelle 2: Systematische Darstellung der Aufgaben

Im Zahlenraum 100 gibt es vier repräsentative Aufgaben, bei denen beide Zahlen zweistellig sind und zwei Aufgaben mit jeweils einem einstelligen Summanden bzw. Subtrahenden. Zwei Aufgaben sind ohne Zehnerüberschreitung, die anderen vier sind mit Zehner-über- bzw. -unterschreitung. Von den im Zahlenraum 1000 eingesetzten Aufgaben sind drei von den fünf Aufgaben mit einer Hilfsaufgabe gut lösbar.

Zeitpunkt	Beginn 2. Schulstufe	Ende 2. Schulstufe	Beginn 3. Schulstufe	Ende 3. Schulstufe	Beginn 4. Schulstufe	Ende 4. Schulstufe
Aufgaben	23 + 35 48 – 23	23 + 35 48 – 23 39 + 48 82 – 57 23 + 9 74 – 8	23 + 35 48 – 23 39 + 48 82 – 57 23 + 9 74 – 8 243 + 329 391 – 48 784 – 199	23 + 35 48 – 23 39 + 48 82 – 57 23 + 9 74 – 8 243 + 329 391 – 48 784 – 199	23 + 35 48 – 23 39 + 48 82 – 57 23 + 9 74 – 8 243 + 329 391 – 48 784 – 199 701 – 698 527 + 399	23 + 35 48 – 23 39 + 48 82 – 57 23 + 9 74 – 8 243 + 329 391 – 48 784 – 199 701 – 698 527 + 399
Anzahl	2	6	9	9	11	11

Tabelle 3: Zeitlicher Verlauf, wann die Rechnungen eingesetzt wurden

Die Rechensätzchen wurden öfters angeboten, so dass aus den elf Aufgaben insgesamt 48 Rechensätzchen analysiert werden können (Tabelle 3).

Zu Beginn der dritten und vierten Schulstufe waren auch Aufgaben dabei, die noch nicht im Unterricht thematisiert wurden. Dies waren *23 + 35* und *48 – 23* in der zweiten Schulstufe, *243 + 329*, *391 – 48* und *784 – 199* in der dritten Schulstufe. So ergibt sich die Möglichkeit, auch Vorerfahrungen zu Rechenoperationen genauer zu betrachten.

5.3 Erhebungsmethoden

Die Denk- und Vorgehensweisen der Kinder wurden vorrangig durch **Einzelbefragungen** erhoben. **Einzelbeobachtungen** während des Ausfüllens des Arbeitsblattes und während des Interviews lieferten zusätzliche Auskünfte über das nonverbale Verhalten des Kindes. Das ausgefüllte Arbeitsblatt wurde ebenfalls in die Analyse miteinbezogen.

Klinische Interviews sind geeignete Methoden, um Aufschluss über die Denkweisen der Kinder zu bekommen. Die Hauptintention besteht darin, mehr darüber zu erfahren, wie Kinder denken. Es geht nicht darum, die Kinder durch geschicktes Fragen möglichst schnell zur richtigen Lösung zu führen. Vorrangig gilt es, dass die/der Interviewer/in zuhört, was Kinder beim Ausführen der Rechnung dazu sprechen. Das Vorgehen der Interviewerin / des Interviewers ist durch bewusste Zurückhaltung geprägt. Das schließt ein, dass sie/er sparsam, aber gezielt interveniert, indem sie/er durch situationsangemessene Fragen oder Impulse ihr/sein offenkundiges Interesse an den Denk- und Handlungsweisen der Kinder offen zum Ausdruck bringt. (SELTER & SPIEGEL, 1997, S. 100f.)

Für das Kind ergibt sich eine zweifach schwierige Situation. Es muss eine Rechenaufgabe lösen und wird dabei beobachtet. Darüber hinaus soll es sich dazu noch äußern, wie es rechnet. Das ist im herkömmlichen Mathematikunterricht nicht üblich. Die Anforderung, etwas zum eigenen Denken/Rechnen sagen zu müssen, löst manchmal Irritationen bei den eigenen Denkprozessen aus. Durchaus positiv, dass mathematisch nicht korrekte Rechenwege durch Verbalisierung reflektiert und dann richtig korrigiert werden. Aber auch mit eher negativen Auswirkungen, dass das Kind sein Denken nicht fassen kann und bei schon korrekten Lösungen verunsichert wird.

Beobachtungen eignen sich bei dieser Untersuchung besonders, um aus dem Verhalten auf Zählstrategien des Kindes schließen zu können. Zählstrategien wurden im Rahmen der Untersuchung erhoben, aber aus Abgrenzungsgründen nicht in diese Publikation aufgenommen.

Schriftliche Unterlagen, wie das ausgefüllte Arbeitsblatt, sind ein wertvolles Primärdokument im Analyseprozess.

5.4 Durchführung

Das Arbeitsblatt mit den Rechnungen ist so gestaltet, dass die beiden Zahlen der einzelnen Rechnungen nebeneinander, nicht untereinander stehen. Platz für Nebenrechnungen ist auf der Rückseite. Damit die Kinder auch das Aufschreiben ins Kalkül ziehen, ist im Interviewleitfaden festgehalten, dass die Interviewenden explizit darauf hinweisen müssen.

Die Einzelinterviews wurden nach einheitlichen Richtlinien durchgeführt. Die Versuchsleiterin gab sie mündlich bekannt und zusätzlich erhielt jede/r auch die Anweisungen schriftlich.

Die Einzelinterviews wurden in den Klassen bei den einzelnen Kindern gleichzeitig oder knapp zeitlich hintereinander durchgeführt. Bedingt durch räumliche Begebenheiten wurden die Interviews nicht aufgezeichnet, sondern nur protokolliert.

Nachdem die Daten Aktionsforschungsprojekten entstammen, war die Datenerhebung in den Studienbetrieb bzw. Unterricht eingebettet. Eine Seminargruppe von Studierenden der Volksschullehrerinnen- und –lehrerausbildung betreute eine Klasse. Jede/r Studierende betreute ein oder zwei Kinder.

In einer vorherigen Seminarveranstaltung der Studierenden fand eine erste inhaltliche Information mit Rater-Schulung statt. Die Studierenden bereiteten sich zusätzlich mittels Literaturstudium auf die Lernstandserfassung vor.

Im Rahmen einer eineinhalbstündigen Seminarveranstaltung fanden eine kurze Vorbesprechung, die Durchführung und eine kurze Nachbesprechung statt. Zu Beginn (ca. 20 Minuten) erhielten die Studierenden im Seminarraum das Blatt „Zum Denken und Rechnen“, das von den Kindern auszufüllen war, und ein Handout mit organisatorischen und inhaltlichen Informationen. Anschließend gingen die Studierenden in die Praxisschule im selben Gebäude zu den Kindern. Jede/jeder Studierende erfasste den Lernstand von ein oder zwei Schülerinnen oder Schülern. Ein/e Studierende/r saß neben einem Kind und beobachtete es, während es rechnete. Die/der Studierende fragte nach den Lösungsmethoden, wie z. B. „Rechne mir das laut vor!“. Die Äußerungen des Kindes hielt die/der Studierende schriftlich fest. Das Seminar schloss mit einer kurzen Reflexion (ca. 15 Minuten) über die durch die Kinder gewonnenen Einsichten. Abschließend wurde das weitere Vorgehen besprochen.

In der zweiten Schulstufe wurden Veranschaulichungen, der LEGEMAX mit Zehnerstangen und Einerwürfeln und zu Beginn der dritten Schulstufe wurde Rechengeld bei den Interviews bereitgestellt. Die Kinder verwendeten das Material selten. Erstaunlicherweise griffen die Kinder trotz Rechenanforderungen, die ihren schulischen Kenntnisstand überstiegen, kaum auf Materiallösungen zurück. Für die Kinder, insbesondere für die leistungsschwachen war zudem das Material auch keine Hilfe, weil sie die Struktur des Materials schlecht erkannten (ROTTMANN & SCHIPPER, 2002, S. 70), und trotz angebotenem Material die Rechnung falsch lösten. Wegen der geringen Anzahl von Kodierungen bezüglich des Einsatzes von Materialien ist es in der Auswertung nicht ausgewiesen.

5.5 Dokumentation und Auswertung der Daten

Als Datenmaterial stehen ca. 300 Interview- bzw. Beobachtungsprotokolle zur Verfügung. Die ermittelten Daten ermöglichen eine Längsschnittsuntersuchung im Hinblick auf die Entwicklung additiver Rechenoperationen von der zweiten bis zur vierten Schulstufe.

Die Studierenden, welche die Interviews durchführten, hielten in einem Studienauftrag die gewonnenen Daten schriftlich fest. Sie kategorisierten die Rechentypen, die Korrektheit der Lösungen und die Lösungsmethoden jeder einzelnen Rechnung. Zwei Studierende der Seminargruppe übernahmen Koordinationsarbeiten und fassten die Ergebnisse zusammen. Das Erfassen des Lernstandes und das Erheben der Lösungsstrategien war Bestandteil der Seminarveranstaltung und wurde in die Leistungsfeststellung und -beurteilung eingebaut. Die Beobachtungsprotokolle und die Mitschriften während des Interviews inklusive den ausgefüllten Arbeitsblättern wurden gemeinsam mit den schriftlichen Arbeiten abgegeben und standen nachträglich zur Analyse zur Verfügung.

Die Kategorisierung in die vier Rechentypen wurde anhand der Interviewaufzeichnungen und der schriftlichen Unterlagen durchgeführt. Eine vorläufige Kategorisierung erfolgte durch die Studierenden. Nach Abschluss der Erhebung im Juli 2007 führten zwei durch die Versuchsleiterin geschulte studentische Hilfskräfte nochmalige Analyse- und Ratingarbeiten durch. Schlussendlich überarbeitete die Versuchsleiterin gemeinsam mit einer studentischen Hilfskraft nochmals im Juli 2008 die Daten. Das gesamte Team, das ca. 300 Studierende bei der Erhebung miteinschließt, bemühte sich sehr, die Gedankengänge der Kinder zu heben. Wir setzten Interviews, nicht nur schriftliche Aufzeichnungen der Kinder ein. Das verspricht, näher an die Wahrheit zu kommen. Aber letztendliche Gewissheit über das mentale Vorgehen der Kinder kann es auch bei dieser Verfahrensweise nicht geben.

Jede einzelne Rechnung wurde nach Rechentyp, Korrektheit der Lösung und Lösungsmethode kodiert. In diesem Bericht sind die Rechnungen nach Rechentyp und Korrektheit der Lösung in die Analyse aufgenommen worden.

Die Einstufung als Kopfrechnen erfolgte, wenn sich auf dem Papier keinerlei zusätzliche Notizen befanden und die Kinder in Zahlganzheiten rechneten. Wurden beim Zahlenrechnen Merkziffern, Zwischenergebnisse oder ganze Rechnungen notiert, was sehr selten passierte, wurde der Ansatz als halbschriftlich klassifiziert. Es gab pro Rechnung max. ein bis zwei Zuordnungen. Zusätzlich sind die durchgeführten halbschriftlichen Notationen unvollständig und dienten vor allem als Merkhilfe. Wegen der geringen Anzahl und der auch noch unvollständigen Notationen werden in der Auswertung die Kategorisierungen des halbschriftlichen Rechnens dem Kopfrechnen zugeordnet, das ebenfalls dem Bereich Zahlenrechnen angehört.

Als schriftliches Rechnen wurden die Rechnungen eingestuft, bei denen im vorgeschriebenen Algorithmus gerechnet wurde, entweder mit nochmaligem Aufschreiben oder auch nur durch Sprechen mit Notieren der jeweiligen Ziffer im Endergebnis. Ziffernweise mündliches Rechnen erfolgte dann, wenn mit Ziffern gerechnet wurde, jedoch nicht im schriftlichen Normalverfahren.

Da die Grenzen zwischen den einzelnen Rechentypen fließend sind, bringt diese oder eine andere Festlegung bzw. Unterscheidung mit sich, dass nicht alle Rechenwege eindeutig identifiziert werden können. Im Zahlenraum 100 konnten 1396 von 1408 Rechnungen (99 %) kodiert werden. Im Zahlenraum 1000 konnten 658 von 704 Rechnungen (93 %) einbezogen werden. Die nicht durchgeführten oder nicht kodierten Rechnungen sind im Anhang 1 bei den einzelnen 48 Rechnungen ausgewiesen. In die weitere Auswertung werden nur die gültigen Fälle aufgenommen. Die Häufigkeit und die daraus entstehenden gültigen Prozente ergeben sich aus der Anzahl von Rechnungen, in denen eindeutig ein Rechentyp und eine Kodierung auf richtig und falsch erfolgen konnten.

6 ERGEBNISSE

Zwar ist die Auswahl der Aufgaben noch die der Kinder streng repräsentativ, dennoch können gewisse interessante Tendenzen festgestellt werden. Deren Darstellung erfolgt abschnittsweise bezüglich Rechentypen und unter dem Gender-Aspekt auf den folgenden Seiten.

6.1 Rechentypen

Die Aufgabenbearbeitungen wurden danach kategorisiert, ob die Kinder Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliches Rechnen und ziffernweise mündliches Rechnen benutzten. Halbschriftliches Rechnen trat wenig auf, deshalb wurden die Nennungen dem Kopfrechnen zugeordnet, ebenfalls ein Bereich des Zahlenrechnens.

Die Kategorisierungen von Rechentypen werden nach der Häufigkeit allgemein, der Häufigkeit in Hinblick auf die Rechenarten und nach der Korrektheit der Lösung analysiert. Zusätzlich wird im folgenden Kapitel auch nach Tendenzen, die sich im Wahlverhalten bei Mädchen und Buben zeigen, ausgewertet. In den folgenden Ausführungen sind die wichtigsten Daten und Erkenntnisse zusammengefasst. Die detaillierten Ergebnisse zu den einzelnen Rechnungen, getrennt nach jeweiligem Erhebungszeitpunkt, sind dem Anhang 1 zu entnehmen.

6.1.1 Stete Zunahme des Anteils an schriftl. Rechenverfahren

In diesem Abschnitt wird beschrieben, welcher Anteil der Schülerinnen und Schüler jeweils Kopf-, schriftliches und ziffernweise mündliches Rechnen einsetzten und wie sich das Wahlverhalten über den Untersuchungszeitraum hinweg sich veränderte.

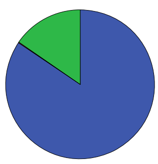
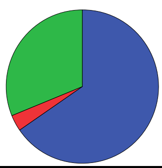
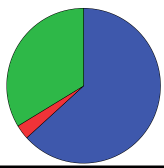
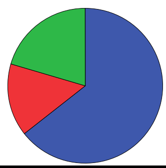
N = 44	Beginn 2. Schulstufe bis zur Einführung der schriftl. Rechenverfahren	Ende 3. Schulstufe	Beginn 4. Schulstufe	Ende 4. Schulstufe
Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich)	84 %	65 %	63 %	64 %
Ziffernrechnen (algorithmisch schriftlich)	0	3 %	3 %	15 %
Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich)	15 %	31 %	34 %	20 %
Legende Kopf, halbschrift. schriftlich ziffernweise mündlich				

Tabelle 4: Prozentanteil der jeweiligen Rechentypen, mit der die Kinder Rechnungen im Zahlenraum 100 bearbeiteten

In den Tabellen 4 und 5 ist die Verteilung nach *Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich)*, *Ziffernrechnen (algorithmisch schriftlich)* und *Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich)* über die drei Schuljahre hinweg dargestellt. Die Daten der Erhebungszeitpunkte *Beginn der zweiten Schulstufe*, *Ende der zweiten Schulstufe* und *Beginn der dritten Schulstufe* unterscheiden sich nicht wesentlich. Deshalb sind sie zusammengefasst. Im Anhang 1 können die genauen Daten zu den einzelnen Erhebungszeitpunkten nachgelesen werden.

Auf den ersten Blick ist ersichtlich, dass die schriftlichen Normalverfahren nach ihrer Einführung Mitte der dritten Schulstufe einen kontinuierlich höheren Anteil aufweisen. Im Zahlenraum 1000 (Tabelle 5) steigt der Anteil des schriftlichen Rechnens von 14 % auf 22 % und am Ende der 4. Schulstufe auf 37 %. Bei Rechnungen im Zahlenraum 100 (Tabelle 4) sind die Anteile geringer, das ja auch objektiv dem kleineren Zahlenraum entspricht.

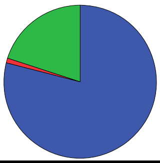
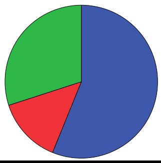
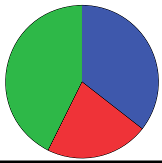
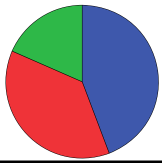
N = 44	Beginn 3. Schulstufe	Ende 3. Schulstufe	Beginn 4. Schulstufe	Ende 4. Schulstufe
Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich)	79 %	56 %	36 %	44 %
Ziffernrechnen (algorithmisch schriftlich)	1 %	14 %	22 %	37 %
Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich)	20 %	30 %	43 %	18 %
Legende Kopf, halbschrift. schriftlich ziffernweise mündlich				

Tabelle 5: Prozentsätze der jeweiligen Rechentypen, mit der die Kinder Rechnungen im Zahlenraum 1 000 bearbeiteten

Der Anteil des Kopfrechnens bleibt im Zahlenraum 100 ab Einführung des schriftlichen Rechnens konstant. Das Verhältnis Zahlenrechnen und Ziffernrechnen variiert hier kaum. Im Zahlenraum 1000 dagegen zeigen sich Veränderungen zwischen Zahlen- und Ziffernrechnen in beiden Richtungen.

Der Anteil des schriftlichen Rechnens steigt sowohl im Zahlenraum 100 als auch im Zahlenraum 1000 nochmals am Ende der vierten Schulstufe. Zugleich geht der Anteil an ziffernweise mündlichem Rechnen, jedoch nicht im Kopfrechnen, zurück.

Dies deutet darauf hin, dass die die festgelegten Algorithmen des schriftlichen Rechnens lange Zeit nur vage gedächtnismäßig verankert sind. Die Algorithmen werden durch eigene adaptierte ziffernweise mündliche Vorgehensweisen ersetzt. Das zeigt sich im höheren Anteil des ziffernweise mündlichen Rechnens am Ende der dritten bzw. am Beginn der vierten Schulstufe. Am Ende der vierten Schulstufe dagegen steht wesentlich mehr Kindern spontan der Algorithmus des Normalverfahrens zur Verfügung.

Die Kinder verwenden den Algorithmus schriftlicher Rechenverfahren auch bei Aufgaben, bei denen er objektiv nicht erforderlich wäre, wie z. B bei der Rechnung 23 – 9, die am Ende der 4. Schulstufe 16 % der Schülerinnen und Schüler im schriftlichen Sprechalgorithmus lösten (siehe Anhang 1).

Wie bei SELTER (2000a), allerdings nicht so bedeutsam, steigt der Anteil an schriftlichen Rechenverfahren nach deren Einführung in der dritten Schulstufe. Ende der vierten Schulstufe steigt der Anteil nochmals erheblich an und ersetzt das ziffernweise mündliche Rechnen. Schriftliche Rechenverfahren werden auch dann verwendet, wenn sie objektiv nicht unbedingt erforderlich wären.

6.1.2 Annähernd gleiche Wahl der Rechentypen, unabhängig von Rechenarten und Rechnungen

In diesem Abschnitt wird beschrieben, welcher Anteil der Schülerinnen und Schüler Kopf-, schriftliches und ziffernweise mündliches Rechnen, differenziert nach Addition und Subtraktion einsetzten und wie sich das Wahlverhalten über den Untersuchungszeitraum hinweg sich veränderte. Das Wahlverhalten bezüglich Rechnungen wird anhand von zwei Additionen im Zahlenraum 1000 beschrieben.

Vorerst soll geklärt werden, ob das Wahlverhalten zwischen Plus- und Minusaufgaben parallel verläuft. Die Kinder verwendeten annähernd gleiche Rechentypen bei Addition und Subtraktion. Rechneten sie Plus-Aufgaben z. B. schriftlich algorithmisch, dann rechneten sie eine ähnliche Anzahl von Minus-Aufgaben mit einer Wahrscheinlichkeit von über 50 % im Zahlenraum 1 000 auch schriftlich algorithmisch. Der Korrelationskoeffizient (Maß für den Zusammenhang) beträgt bei allen drei Rechentypen im Zahlenraum 100 ca. 0,90, nämlich 0,932, 0,921 und 0,890. Im Zahlenraum 1000 liegt er über 0,70, nämlich 0,788; 0,779 und 0,736 (Tabelle 6 und 7).

Zahlenraum 100 **Basis Häufigkeiten** **N = 44**		Zahlenrechnen (Plus)	Zahlenrechnen (Minus)	Schriftliches Rechnen (Plus)	Schriftliches Rechnen (Minus)	Ziffernweise mündliches Rechnen (Plus)	Ziffernweise mündliches Rechnen (Minus)
Zahlenrechnen (Plus)	Korr. nach Pearson	1	**,932(**)**	-,642(**)	-,542(**)	-,912(**)	-,856(**)
	Signifikanz (2-seitig)		,000	,000	,000	,000	,000
Zahlenrechnen (Minus)	Korr. nach Pearson	**,932(**)**	1	-,629(**)	-,534(**)	-,844(**)	-,934(**)
	Signifikanz (2-seitig)	,000		,000	,000	,000	,000
Schriftliches Rechnen (Plus)	Korr. nach Pearson	-,642(**)	-,629(**)	1	**,921(**)**	,302(*)	,360(*)
	Signifikanz (2-seitig)	,000	,000		,000	,046	,016
Schriftliches Rechnen (Minus)	Korr. nach Pearson	-,542(**)	-,534(**)	**,921(**)**	1	,219	,219
	Signifikanz (2-seitig)	,000	,000	,000		,153	,154
Ziffernweise mündliches Rechnen (Plus)	Korr. nach Pearson	-,912(**)	-,844(**)	,302(*)	,219	1	**,890(**)**
	Signifikanz (2-seitig)	,000	,000	,046	,153		,000
Ziffernweise mündliches Rechnen (Minus)	Korr. nach Pearson	-,856(**)	-,934(**)	,360(*)	,219	**,890(**)**	1
	Signifikanz (2-seitig)	,000	,000	,016	,154	,000	

** Die Korrelation ist auf dem Niveau von 0,01 (2-seitig) signifikant.
* Die Korrelation ist auf dem Niveau von 0,05 (2-seitig) signifikant.

Tabelle 6: Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion im Zahlenraum 100 (Korrelation nach Pearson)

Die Schülerinnen und Schüler rechneten mit einem bevorzugten Rechentyp und verwendeten die anderen weniger. Weit auseinander liegen *Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich)* und *Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich)*. Kinder, die vorwiegend *Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich*) durchführten, verwendeten kaum *Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich)* (Tabelle 6 und 7). Versöhnlich stimmt, dass wesentlich mehr Kinder Zahlenrechnen durchführen (siehe Abschnitt *6.1.1 Stete Zunahme des Anteils an schriftl. Rechenverfahren*), das eher auf ein elaboriertes Zahlverständnis hinweist.

Zahlenraum 1000 **Basis Mittelwert** **N = 44**		Zahlen-rechnen (Plus)	Zahlen-rechnen (Minus)	Schriftliches Rechnen (Plus)	Schriftliches Rechnen (Minus)	Ziffernweise mündliches Rechnen (Plus)	Ziffernweise mündliches Rechnen (Minus)
Zahlenrechnen (Plus)	Korr. nach Pearson	1	**,788(**)**	-,594(**)	-,377(*)	-,704(**)	-,672(**)
	Signifikanz (2-seitig)		,000	,000	,012	,000	,000
Zahlenrechnen (Minus)	Korr. nach Pearson	**,788(**)**	1	-,532(**)	-,488(**)	-,457(**)	-,760(**)
	Signifikanz (2-seitig)	,000		,000	,001	,002	,000
Schriftliches Rechnen (Plus)	Korr. nach Pearson	-,594(**)	-,532(**)	1	**,779(**)**	-,105	,081
	Signifikanz (2-seitig)	,000	,000		,000	,499	,601
Schriftliches Rechnen (Minus)	Korr. nach Pearson	-,377(*)	-,488(**)	**,779(**)**	1	-,158	-,114
	Signifikanz (2-seitig)	,012	,001	,000		,305	,460
Ziffernweise mündliches Rechnen (Plus)	Korr. nach Pearson	-,704(**)	-,457(**)	-,105	-,158	1	**,736(**)**
	Signifikanz (2-seitig)	,000	,002	,499	,305		,000
Ziffernweise mündliches Rechnen (Minus)	Korr. nach Pearson	-,672(**)	-,760(**)	,081	-,114	**,736(**)**	1
	Signifikanz (2-seitig)	,000	,000	,601	,460	,000	

** Die Korrelation ist auf dem Niveau von 0,01 (2-seitig) signifikant.
* Die Korrelation ist auf dem Niveau von 0,05 (2-seitig) signifikant.

Tabelle 7: Zusammenhang zwischen Plus- und Minusaufgaben im Zahlenraum 1000 (Korrelation nach Pearson)

Vergleicht man über die sechs Messzeitpunkte hinweg, welche Anteile von Rechentypen die Kinder bei Plus- und Minusaufgaben einsetzten, so ist kaum ein Unterschied festzustellen (Anhang 2). Anführenswert ist dennoch Folgendes:

- Im Zahlenraum 100 verwendeten die Schülerinnen und Schüler am Ende der vierten Schulstufe bei der Addition mehr *Ziffernrechnen (algorithmisch schriftlich)* (Anhang 2).

- Werden über die vier Messpunkte, bei denen Rechnungen im Zahlenraum 1000 angeboten wurden, die Häufigkeiten der Rechentypen summiert, ist bei der Addition der Anteil des *Ziffernrechnens (algorithmisch schriftlich)* mit 24 % etwas höher, während der Anteil der Subtraktion bei 20 % liegt. Der Anteil der Subtraktion ist beim *Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich)* und *Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich)* jeweils um 2 bzw. um 3 % höher (Tabelle 6). Statistisch signifikante Unterschiede ergeben sich auf Basis nominaler Daten nicht.

Der leichte Überhang der Addition bei den schriftlichen Rechenverfahren erklärt sich möglicherweise dadurch, dass die Kinder das standardisierte schriftliche Verfahren der Addition leichter verstehen und daher auch öfters anwenden. Das Normalverfahren der schriftlichen Subtraktion mit Erweitern und Ergänzen entspricht nicht dem gebräuchlichen Operationsverständnis der Subtraktion. Kinder verbinden mit Subtrahieren eher Wegnehmen bzw. Abziehen. Das schriftliche Normalverfahren der Subtraktion ist deshalb nicht unmittelbar im Gedächtnis verankert und auch nicht so spontan einsetzbar wie das Verfahren der Addition.

Darauf weisen zahlreiche Denkweisen beim *ziffernweise mündlichen Rechnen* hin. Viele Kinder nutzten ziffernweise Zugänge über das Abziehen statt der im Normalverfahren vorgeschriebenen Ergänzungen. Auch das Entbündeln trat oft auf. Das Verfahren des Abziehens mit Entbündeln war für die Kinder mental verfügbar, obwohl es nie im Buch erwähnt wird oder im Unterricht explizit angesprochen wurde. Das erklärt die etwas höheren Anteile der Subtraktion beim ziffernweise mündlichen Rechnen. Wie MOSEL-GÖBEL (1988) bereits feststellt, kann vermutet werden, dass Kinder den mathematischen Hintergrund von Abziehen und Entbündeln wesentlich besser verstehen und daher auch oft einsetzen.

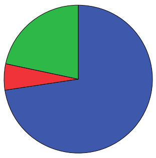
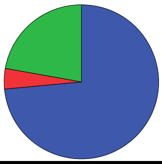
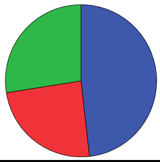
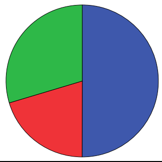
N = 44	**Zahlenraum 100**		**Zahlenraum 1000**	
	Plus-Aufgaben	Minus-Aufgaben	Plus-Aufgaben	Minus-Aufgaben
Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich)	72 %	74 %	48 %	50 %
Ziffernrechnen (algorithmisch schriftlich)	6 %	4 %	24 %	20 %
Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich)	22 %	22 %	27 %	30 %
Legende Kopf, halbschrift. schriftlich ziffernweise mündlich				

Tabelle 8: Wahl der Rechentypen bei Plus- und Minusaufgaben

Nicht nur bei Addition und Subtraktion wird unabhängig vorgegangen, auch bei einzelnen Rechnungen. Es wird keineswegs der objektiv einfachere Weg, sondern der individuell bevorzugte Rechentyp verwendet. Bei der Addition aus dem Zahlenraum 1000, *243 + 329,* die keine besondere Zahlenkonstellation aufweist und bei der Rechnung *527 + 399*, die durch Zahlenrechnen mittels *527 + 400 – 1* zu lösen ist, treten am Ende der vierten Schulstufe keinerlei Unterschiede im Wahlverhalten auf (Anhang 1). Ebenso wie bei SELTER (2000a) muss festgestellt werden, dass die das Rechnen erleichternden Strukturen nicht erkannt werden.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass es zwar ein unterschiedliches Wahlverhalten im Längsschnitt und bezüglich Rechnungen im Zahlenraum 100 und Zahlenraum 1000 gibt, aber nicht bei den Rechenarten und nicht zwischen einzelnen Rechnungen. Kinder haben einen bevorzugten Rechentyp, den sie hauptsächlich einsetzen. Bei den Minuslösungen im Zahlenraum 1000 fällt auf, dass es weniger schriftlich algorithmische Lösungen gibt, weil das Normalverfahren nicht dem Alltagsverständnis der Kinder über Subtraktion entspricht. Dies zeigt sich weniger quantitativ über Häufigkeiten, sondern über die Denkweisen beim ziffernweise mündlichen Subtrahieren, bei dem vorwiegend Abziehstrategien verwendet worden sind. Wie bei SELTER (2000a) werden individuelle Adaptierungen, um geschickte Zahlbeziehungen auszunützen, nicht verwendet. Kinder sehen auf Basis des derzeitigen Vorgehens im Unterricht und des verwendeten Schulbuchs keine Zahlbeziehungen, um geschickter zu Lösungen zu gelangen.

6.1.3 Niedrigere Erfolgsquote bei Minusrechnen, gepaart mit ziffernweise mündlichem Rechnen

In diesem Abschnitt wird beschrieben, welcher Anteil an Schülerinnen und Schüler bei den drei Rechentypen *Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich)*, *Ziffernrechnen (algorithmisch schriftlich)* und *Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich*) korrekte Ergebnisse hat und wie sie sich von der zweiten bis zur vierten Schulstufe veränderten. Zusätzlich wird noch untersucht, ob sich unterschiedliche Tendenzen zwischen den Rechenarten ergeben.

Die Ergebnisse im Zahlenraum 100 überzeugen. 86 % der Rechnungen, die im Rahmen dieser Lernstandserhebungen gerechnet wurden, sind richtig (Tabelle 9).

Die Lösungsrate steigt kontinuierlich von 60 % zu Beginn der zweiten Schulstufe auf 94 % am Ende der vierten Schulstufe. Die Lösungsrate ist beim *Zahlenrechnen* durchgehend um 5 bis 10 % höher als beim *Ziffernrechnen (stellenweise mündlich)*. *Schriftliches Rechnen* tritt, wie objektiv durchaus wünschenswert, zu wenig auf und wird daher in die Analysen nicht miteinbezogen. (siehe Anhang 3)

	Richtige Ergebnisse		Falsche Ergebnisse		gesamt	
	Häufigkeit	Gültige Prozente	Häufigkeit	Gültige Prozente	Anzahl	Gültige Prozente
Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich)	895	87,8 %	124	12,2 %	1019	100,0 %
Ziffernrechnen (schriftlich algorithmisch)	57	(98,3 %)	1	(1,7 %)	58	100,0 %
Ziffernrechnen (ziffern-weise mündlich)	250	78,6 %	68	21,4 %	318	100,0 %
	1202	86,2 %	193	13,8 %	1396	

Tabelle 9: Zahlenraum 100 - Korrektheit der Lösungen bei den einzelnen Rechentypen

Im Zahlenraum 1000 wurden zu Beginn der dritten Schulstufe 42 % der Rechnungen richtig gelöst. Auch im Zahlenraum 1000 steigt die Lösungsrate kontinuierlich von 56 % bis 82 % an. Die höchste Rechensicherheit weist das schriftliche Rechnen auf, gefolgt vom Zahlenrechnen. Die niedrigste Rate ist, gleich wie im Zahlenraum 100, das *Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich)* (Tabelle 10 und Anhang 3).

	Richtige Ergebnisse		Falsche Ergebnisse		gesamt	
	Häufigkeit	Gültige Prozente	Häufigkeit	Gültige Prozente	Häufigkeit	Gültige Prozente
Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich)	231	71,5 %	92	28,5 %	323	100,0 %
Ziffernrechnen (schriftlich algorithmisch)	129	88,4 %	17	11,6 %	146	100,0 %
Ziffernrechnen (ziffern-weise mündlich)	112	59,3 %	77	40,7 %	189	100,0 %
	472	71,7 %	186	28,3 %	658	100,0 %

Tabelle 10: Zahlenraum 1000 - Korrektheit der Lösungen bei den einzelnen Rechentypen

Die Lösungsraten sind bei Rechnungen im Zahlenraum 100 höher als im Zahlenraum 1000. Die Reihung bezüglich Korrektheit des Ergebnisses bei den drei Kategorien *Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich)*, *Ziffernrechnen (algorithmisch schriftlich)* und *Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich)* ist bei beiden Zahlenräumen ähnlich. (siehe Anhang 3)

Schon zu Beginn der zweiten Schulstufe wurden die beiden Rechnungen *23 + 35* und *48 – 23* ungefähr zur Hälfte richtig gelöst. Das ist besonders bemerkenswert, weil zu diesem Zeitpunkt die Kinder zwar die Zahlen im Zahlenraum 100 im Unterricht kennen lernten, aber noch nicht damit rechneten. Das heißt, dass mindestens ein Viertel der Kinder bereits viel (alles?) weiß, was sie in nächster Zeit „lernen" sollen (FAST, GSTATTER & WISER, 2005, S. 23)

			Beginn 2. Schulstufe	Ende 2. Schulstufe	Beginn 3. Schulstufe	Ende 3. Schulstufe	Beginn 4. Schulstufe	Ende 4. Schulstufe
Zahlenraum 100	Plus-Aufgaben	Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich)	67 % (von 33)	85 % (von 104)	93 % (von 121)	89 % (von 82)	90 % (von 81)	94 % (von 85)
		Ziffernrechnen (schriftl. algorithmisch)			100 % (von 1)	100 % (von 9)	100 % (von 4)	100 % (von 26)
		Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich)	22 % (von 9)	79 % (von 24)	90 % (von 10)	90 % (von 40)	91 % (von 47)	100 % (von 21)
	Minus-Aufgaben	Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich)	65 % (von 34)	82 % (von 103)	89 % (von 115)	91 % (von 90)	88 % (von 86)	95 % (von 85)
		Ziffernrechnen (schriftl. algorithmisch)					100 % (von 4)	93 % (von 14)
		Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich)	50 % (von 8)	54 % (von 26)	81 % (von 16)	81 % (von 42)	69 % (von 42)	79 % (von 33)
Zahlenraum 1000	Plus-Aufgaben	Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich)			74 % (von 27)	89 % (von 27)	62 % (von 29)	82 % (von 38)
		Ziffernrechnen (schriftl. algorithmisch)			100 % (von 1)	40 % (von 5)	80 % (von 20)	97 % (von 35)
		Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich)			29 % (von 7)	92 % (von 12)	75 % (von 36)	71 % (von 14)
	Minus-Aufgaben	Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich)			58 % (von 52)	54 % (von 46)	87 % (von 46)	74 % (von 58)
		Ziffernrechnen (schriftl. algorithmisch)				77 % (von 13)	92 % (von 26)	91 % (von 46)
		Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich)			23 % (von 13)	41 % (von 27)	57 % (von 54)	65 % (von 26)

Tabelle 11: Erfolgsquoten bei den verschiedenen Rechenarten

Tabelle 11 gibt einen generellen Überblick, wie erfolgreich die Schülerinnen und Schüler in Hinblick auf die Rechenarten waren. Die Werte stellen jeweils Prozentsätze dar. Die in Klammer notierte Zahl gibt den Grundwert an, wie viele Schüler insgesamt diesen Rechentyp wählten. Die Anzahl der richtig gelösten Rechnungen ergibt sich aus der Multiplikation von Prozentsatz mit Grundwert.

Die Tabelle berücksichtigt Rechentypen und Rechenarten, so ergeben sich vier Varianten, nämlich Zahlenrechnen bei Plus- und Minusaufgaben, ebenso Ziffernrechnen bei Plus- und Minusaufgaben.

Vergleicht man die Lösungsraten bei den Rechenarten, so fällt auf, dass bei den Minusrechnungen wie bei SELTER (2000a, 2000b) niedrigere Lösungsraten auftreten.

Vergleicht man die Korrektheit der Lösung bei den Rechentypen, so sind die Werte beim Zahlenrechnen bei Plus- und Minusrechnungen annähernd gleich. Unterschiede gibt es beim ziffernweise mündlichen Rechnen. Im Zahlenraum 100 liegen die Lösungsraten bei *Ziffernrechnen – Minusaufgaben* über die fünf Messpunkte hinweg, bei denen die Kinder bereits vorher rechneten, 10 – 20 % unter den anderen drei Varianten (Abbildung 6). Ähnliche Tendenzen gibt es im Zahlenraum 1000. Auch hier sind bei den Minusaufgaben nicht bei allen Rechentypen niedrigere Lösungsraten, sondern wie im Zahlenraum 100 nur beim ziffernweise mündlichen Rechnen.

Vorsichtig interpretierend kann festgehalten werden, dass bei Kindern, die in Zahlganzheiten denken, also Zahlenrechner sind, die Rechenart nur die Richtung des Vorgehens ändert. Das Zahlenverständnis der „Zahlenrechner/innen" reicht aus, sowohl Plus- als auch Minusaufgaben zu lösen.

Bei Kindern, die in den Ziffern in den Stellenwerten denken und nicht ein automatisiertes Normalverfahren zur Verfügung haben, ergeben sich Unterschiede in der Lösungsquote je nach Rechenart. Dies deutet auf ein mangelndes Stellenwert- und

Operationsverständnis hin. Bei Plusaufgaben scheint das Verständnis noch auszureichen, weil nur eine Komponente, der Aspekt des Stellenwerts, beachtet werden muss. Bei Minus-Rechnungen mit Zehnerüberschreitungen, bei denen neben dem Stellenwert auch die Nicht-Kommutativität der Subtraktion zu beachten ist, scheinen manche Kinder überfordert. Zwei Ursachen sind möglich. Ein möglicher Grund sind mangelnde Einsichten in mathematische Strukturen, entweder in den Stellenwert, in die Nichtkommutativität der Subtraktion oder beides. Vielleicht ist aber auch die Komplexität des Vorgehens unüberwindbar, weil gleichzeitig zwei Dimensionen (Stellenwert, Nichtkommutativität der Subtraktion) zu beachten sind. Das Kind erfasst durchaus einzeln die Bedeutung des Stellenwerts und weiß um die Stellung der Minuenden und Subtrahenden. Nur in der komplexen Anforderung können die fachimmanenten Strukturen gedanklich nicht geordnet werden. Die Zuordnung, ob das Scheitern in der Komplexität oder im mangelnden fachlichen Wissen liegt, kann aus den zur Verfügung stehenden Daten nicht herausgelesen werden.

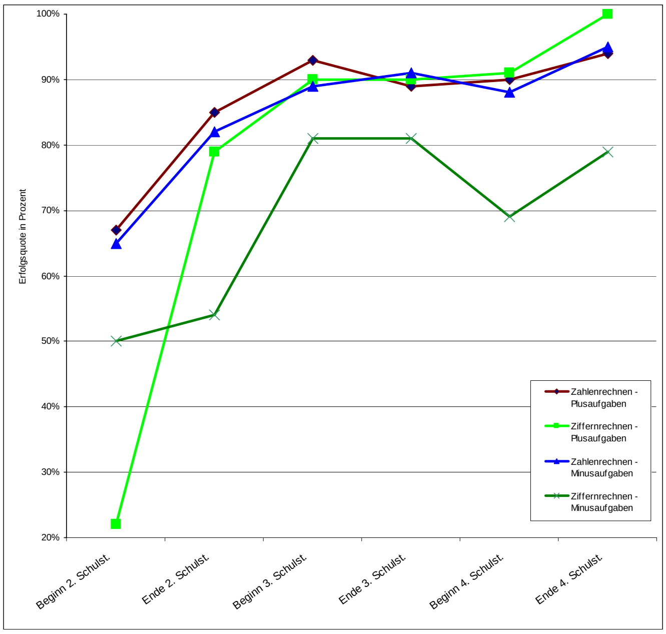


Abbildung 6: Erfolgsquoten bei den verschiedenen Rechentypen und Rechenarten im Zahlenraum 100

Vergleicht man insgesamt die drei verwendeten Rechentypen (Tabelle 11), so liegt die Erfolgsquote am höchsten bei den schriftlichen Rechenverfahren. Nach dem Erlernen der schriftlichen Verfahren Ende der dritten, Anfang der vierten Schulstufe unterscheiden sich die Erfolgsquoten von Plus- und Minusrechnungen beim schriftlichen Rechnen. Am Ende der vierten Schulstufe weisen beide Rechenarten eine erfreulich hohe Lösungsrate auf. Die Gegebenheit, dass die angebotenen Rechnungen mehr zielführend durch Ausnützen geschickter Strategie im Kopf zu lösen wären, relativiert allerdings wieder das Ergebnis.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass sich Unterschiede in der Erfolgsquote in den einzelnen Rechentypen ergeben. Das Verfahren mit der höchsten Erfolgsquote ist Ziffernrechnen (schriftlich algorithmisch), gefolgt von Zahlenrechnen. Am niedrigsten ist die Erfolgsquote beim ziffernweise mündlichen Rechnen, das sich gehäuft bei der Subtraktion zeigt. Mögliche Gründe können ein mangelndes Zahlen- und Operationsverständnis sein, vielleicht aber auch die Komplexität der Anforderungen.

6.2 Buben und Mädchen

6.2.1 Mädchen bevorzugen vermeintlich sicherere Rechentypen

In diesem Abschnitt wird das Wahlverhalten bezüglich Rechentypen von Buben und Mädchen beschrieben und wie sich das Wahlverhalten innerhalb der sechs Messpunkte ändert.

Bei der Auswertung des Entscheidungsverhaltens zwischen Buben und Mädchen lassen sich unterschiedliche Tendenzen feststellen. Buben verwenden wesentlich mehr Zahlenrechnen, Mädchen dagegen verwenden eher Ziffernrechnen. Am Ende der vierten Schulstufe bleibt der Anteil des Ziffernrechnens gegenüber dem Beginn der vierten Schulstufe gleich, größer wird der Anteil an schriftlich algorithmischem Rechnen. Diese Tendenzen sind im Zahlenraum 100 und im Zahlenraum 1000 erkennbar. (Tabelle 12 und Tabelle 13)

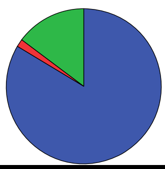
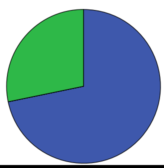
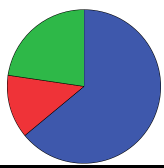
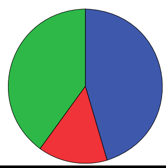
	Beginn 3. Schulstufe				Ende 3. Schulstufe			
	Buben		Mädchen		Buben		Mädchen	
	Häufigkeit	Prozent	Häufigkeit	Prozent	Häufigkeit	Prozent	Häufigkeit	Prozent
Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich)	51	84 %	28	45 %	48	64 %	25	45 %
Ziffernrechnen (algorithmisch schriftlich)	1	2 %	0	0	10	13 %	8	15 %
Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich)	9	15 %	11	28 %	17	23 %	22	40 %
gesamt	61	100 %	39	100 %	75	100 %	55	100 %
Legende Kopf, halbschrift. schriftlich ziffernweise mündlich								

Tabelle 12: Wahl der Rechentypen bei Buben und Mädchen im Zahlenraum 1000 in der dritten Schulstufe

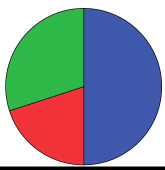
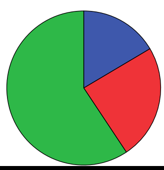
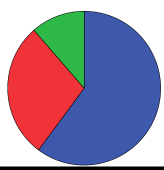
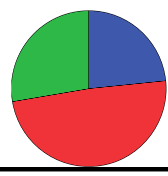
	Beginn 4. Schulstufe				Ende 4. Schulstufe			
	Buben		Mädchen		Buben		Mädchen	
	Häufigkeit	Prozent	Häufigkeit	Prozent	Häufigkeit	Prozent	Häufigkeit	Prozent
Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich)	60	50 %	15	16 %	74	60 %	22	23 %
Ziffernrechnen (algorithmisch schriftlich)	24	20 %	22	24 %	35	28 %	46	49 %
Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich)	36	30 %	54	59 %	14	11 %	26	28 %
gesamt	120	100 %	91	100 %	123	100 %	94	100 %
Legende Kopf, halbschrift. schriftlich ziffernweise mündlich								

Tabelle 13: Wahl der Rechentypen bei Buben und Mädchen im Zahlenraum 1000 in der vierten Schulstufe

Gleich wie bei HORNE (2003) und FENNEMA et al. (1998) entscheiden sich Mädchen für subjektiv sichere Strategien und wagen es weniger, Zahlganzheiten zu verknüpfen. Vermutlich durch ein niedrigeres Fähigkeitsselbstkonzept und um ja keinen Fehler zu begehen, nehmen sich Mädchen selbst die Chance, mehr fundamentale Erfahrungen im dekadischen Zahlensystem zu erlangen.

6.2.2 Erfolgsquoten der Mädchen sinken beim „ziffrigen“ Minusrechnen

In diesem Abschnitt wird beschrieben, welcher Anteil an Mädchen und Buben bei den drei Rechentypen *Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich)*, *Ziffernrechnen (schriftlich algorithmisch)* und *Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich)* richtige Ergebnisse hat und wie sie sich von der zweiten bis zur vierten Schulstufe verändern. Ausgehend vom Gesamtergebnis (siehe *6.1.3 Niedrigere Erfolgsquote bei Minusrechnen, gepaart mit ziffernweise mündlichen Rechnen*), dass Unterschiede in den Erfolgsquoten beim Minusrechnen auftreten, wird dies auch nach Buben und Mädchen analysiert.

Die Lösungsquote über alle Rechnungen ist bei den Buben höher als bei den Mädchen, allerdings nicht in einem statistisch signifikanten Ausmaß. Im Zahlenraum 100 sind die Ergebnisse eher gleich, im Zahlenraum 1000 unterscheiden sie sich mehr.

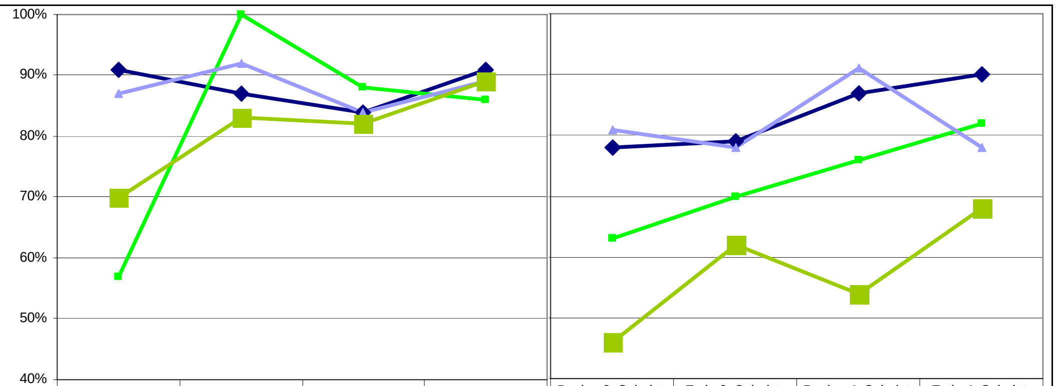
Tabelle 14 zeigt, wie erfolgreich Buben und Mädchen in Hinblick auf Rechenarten bei den jeweiligen Rechentypen waren. Die Werte stellen Prozentsätze dar, die in Klammer angeführte Zahl ist der jeweilige Grundwert. Zwei Felder sagen aus, dass dieser Rechentyp zu diesem Erhebungszeitpunkt nicht verwendet wurde oder nicht kodiert werden konnte. Die Tabelle führt Rechentypen (Zahlenrechnen …) und Rechenarten (Plus- und Minusaufgaben) an, differenziert nach Buben und Mädchen. Da auf der zweiten Schulstufe noch keine Ergebnisse aus dem Zahlenraum 1000 vorliegen und die Erfolgsquoten zu Beginn der zweiten Schulstufe nur bedingt aussagekräftig sind, weil die Rechnungen im Unterricht noch nicht thematisiert wurden, enthält die Tabelle die Erfolgsquoten der Rechnungen des Zahlenraums 100 und 1000 von Beginn der 3. Schulstufe bis zum Ende der 4. Schulstufe.

			Beginn 3. Schulstufe	Ende 3. Schulstufe	Beginn 4. Schulstufe	Ende 4. Schulstufe
Plusaufgaben	Buben	Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich)	91 % (von 87)	87 % (von 71)	84 % (von 79)	91 % (von 87)
		Ziffernrechnen (schriftl. algorithmisch)	100 % (von 1)	83 % (von 6)	75 % (von 12)	97 % (von 30)
		Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich)	57 % (von 7)	100 % (von 22)	88 % (von 32)	86 % (von 7)
	Mädchen	Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich)	87 % (von 61)	92 % (von 38)	84 % (von 31)	89 % (von 36)
		Ziffernrechnen (schriftl. algorithmisch)	100 % (von 1)	75 % (von 8)	92 % (von 12)	100 % (von 31)
		Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich)	70 % (von 10)	83 % (von 30)	82 % (von 51)	89 % (von 28)
Minusaufgaben	Buben	Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich)	78 % (von 99)	79 % (von 87)	87 % (von 97)	90 % (von 103)
		Ziffernrechnen (schriftl. algorithmisch)		100 % (von 8)	85 % (von 13)	96 % (von 24)
		Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich)	63 % (von 16)	70 % (von 30)	76 % (von 37)	82 % (von 22)
	Mädchen	Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich)	81 % (von 68)	78 % (von 49)	91 % (von 35)	78 % (von 40)
		Ziffernrechnen (schriftl. algorithmisch)		40 % (von 5)	100 % (von 17)	89 % (von 36)
		Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich)	46 % (von 13)	62 % (von 39)	54 % (von 59)	68 % (von 37)

Tabelle 14: Erfolgsquoten bei Buben und Mädchen

Die höchsten Lösungsraten sind bei *Ziffernrechnen (schriftlich algorithmisch)* zu finden. Sie weisen keine besonderen Differenzen zwischen Mädchen und Buben auf. Die nähere Betrachtung gilt dem Zahlenrechnen und dem ziffernweise mündlichen

Rechnen. Bei den Plusrechnungen verlaufen die Erfolgsquoten annähernd gleich. Bei den Minusrechnungen, die bereits bei allen Schülerinnen und Schülern unterschiedliche Quoten zeigen (siehe *6.1.3 Niedrigere Erfolgsquoten bei Minusrechnen, gepaart mich ziffernweise mündlichen Rechnen*), ergibt sich noch eine zusätzlich Differenz. Mädchen haben gegenüber Buben eine niedrigere Erfolgsrate bei Minusrechnungen, kombiniert mit ziffernweise mündlichem Rechnen. Die Korrektheit der Lösungen liegt bei den Mädchen um 10 bis 20 % stetig niedriger (Abbildung 7). Nachdem es sich um relative Daten handelt, sei zusätzlich noch vermerkt, dass die Häufigkeit des Grundwerts bei den Mädchen durchgehend höher ist als bei den Burschen (Tabelle 14).



	Plusrechnungen: Beginn 3. Schulst.	Ende 3. Schulst.	Beginn 4. Schulst.	Ende 4. Schulst.	Minusrechnungen: Beginn 3. Schulst.	Ende 3. Schulst.	Beginn 4. Schulst.	Ende 4. Schulst.
Zahlenrechnen Buben	91%	87%	84%	91%	78%	79%	87%	90%
Ziffernrechnen Buben	57%	100%	88%	86%	63%	70%	76%	82%
Zahlenrechnen Mädchen	87%	92%	84%	89%	81%	78%	91%	78%
Ziffernrechnen Mädchen	70%	83%	82%	89%	46%	62%	54%	68%

Plusrechnungen Minusrechnungen

Abbildung 7: Erfolgsquoten von Buben und Mädchen im Zahlen- und Ziffernrechnen (ziffernweise mündlich)

Über die etwaigen Ursachen des schlechteren Abschneidens der Mädchen können nur äußerst vage Vermutungen angestellt werden. Die unterschiedliche Erfolgsrate wurde bereits an anderer Stelle gedeutet. Sie liegt vermutlich in einer ungenügenden Einsicht in das Stellenwertsystem bzw. der Operationsstruktur und/oder in einer Überforderung in der Komplexität des gedanklichen Vorgehens beim Lösen der Rechnung. Buben haben daher wahrscheinlich, wenn sie bei Minusrechnungen ziffernweise mündlich höhere Lösungsraten aufweisen, mehr Einsicht in mathematische Strukturen und kommen besser mit den komplexen Anforderungen zurecht.

Obwohl Mädchen dazu neigen, eher sicherere Vorgangsweisen zu wählen, tappen sie in die Falle, bei diesem vermeintlich sicheren Vorgehen im Bereich der Ziffern noch mehr den Überblick zu verlieren. Sie verwenden vermutlich mehr die *Konzeption der Ziffer im Stellenwert als einzelne Zahl.* Buben verwenden anscheinend eher die *Konzeption der Ziffer abhängig vom Stellenwert* (FUSON et al., 1998, S. 138). Um dies tatsächlich aufzuzeigen, bedarf es einer qualitativen Analyse der Daten, die den Rahmen dieses Berichtes jedoch übersteigt.

7 FAZIT UND SCHLUSSFOLGERUNGEN FÜR DEN UNTERRICHT

Abschließend sollen die wichtigsten Resultate der vorliegenden Untersuchung zusammenfassend angeführt und vor dem Hintergrund ihrer Relevanz für den Mathematikunterricht in der Volksschule diskutiert werden. Vorrangig interessiert, wie und welches Zahl- und Operationsverständnis eingesetzt wird, bzw. welche Maßnahmen geeignet sind, mathematische Strukturen zu erkennen und anzuwenden.

Ausgehend von Daten aus Aktionsforschungsprojekten, die in zwei Klassen durchgeführt wurden, können auf Basis dieser Untersuchung Tendenzen festgestellt und äußerst vorsichtig interpretiert werden.

Viele Kinder haben ein grundlegendes Wissen über Zahlensystem und Rechenoperationen und setzen es beim Rechnen ein. Wenige Kinder können allerdings ihr vorhandenes Wissen gezielt anwenden und Zahlbeziehungen ausnutzen, damit sie geschickt und schnell zu Lösungen gelangen. Dafür bedarf es Hilfestellungen im Unterricht. Die nachfolgenden Überschriften weisen Empfehlungen für Lehrerinnen und Lehrer aus.

Den Rechentyp bewusst auswählen lassen

Schriftliche Rechenverfahren vereinfachen in der Regel das Rechnen und erhöhen die Rechensicherheit. Die Schülerinnen und Schüler verwenden sie ab dem Zeitpunkt der Einführung häufiger. Ein erheblicher Anstieg ist bei dieser Untersuchung nochmals am Ende der vierten Schulstufe zu verzeichnen. Erst zu diesem Zeitpunkt wird das Verfahren umfassend eingesetzt. Allerdings nicht nur bei den Rechnungen, die in der Komplexität ausladend sind, sondern auch bei Aufgaben, die durchaus mittels Kopfrechnen zu lösen wären. Schülerinnen und Schüler neigen auch dazu, einen bevorzugten Rechentyp immer einzusetzen. Individuelle Adaptierungen, um geschickte Zahlbeziehungen auszunützen, werden nicht wahrgenommen.

Das bedeutet für den Mathematikunterricht, dass Schülerinnen und Schüler befähigt und auch dazu angeleitet werden müssen, selbst zu entscheiden, ob schriftliches Rechnen oder Kopfrechnen für eine Aufgabe günstiger ist. Wichtig ist, dass zwischen den „neuen“ Rechnungen und den bereits bekannten eine Verbindung hergestellt werden kann. Nicht jede Aufgabe hat einen speziellen Lösungsweg, sondern verstandene Rechentypen bzw. Lösungswege müssen auf neue Aufgaben übertragen werden. Dazu bedarf es passender Anlässe im Unterricht. In wenigen Schulbüchern, aber auch in den Aufgabenbeispielen der Bildungsstandards (2008) finden sich Beispiele. Um klug entscheiden zu können, sind Einsichten in die Zahl- und Operationsbeziehungen erforderlich, eine Forderung des Lehrplans und der Bildungsstandards.

Auch andere als im Schulbuch angeführte Lösungsmethoden (bei Bedarf) thematisieren

Wenn auch im Schulbuch nur ein Weg vorgegeben ist, beschreiten Kinder ganz unterschiedliche Wege. Beeinflusst durch Veranschaulichungsmittel und gut gemeinte Ratschläge von Erwachsenen, um die Hausaufgaben zu bewältigen, adaptieren Kinder für sich Zugänge. Dies können durchaus brauchbare Methoden auf dem Gebiet des ziffernweise mündlichen Rechnens sein. Manche Methoden sind allerdings weit weg von einem fundierten Zahlenverständnis und führen eher in eine Sackgasse (FUSON, et al., 1997). Wenn Kinder von einer Konzeption, in der sie die Ziffer als Einerzahl in den Stellenwerten interpretieren, in automatisierte schriftliche Algorithmen gleiten, ohne jemals umfassend das System der Bündelung verstanden zu haben, erweist es sich als äußerst schwierig, einen über die natürlichen Zahlen hinausgehenden Zahlbegriff zu erlangen. Solche Kinder verstehen Zahlen als durch Ziffern definierte einzelne für sich stehende Bedeutungen, können aber wenige Beziehungen ineinander denken.

Wenn auch im Schulbuch manche schwierige Methode, wie z. B das stellenweise Rechnen beim Subtrahieren nicht vorgesehen ist, erscheint es wichtig, diese im Unterricht zu thematisieren. Damit die Kinder, die dieses Verfahren verwenden, nicht in ihren Denkweisen allein gelassen werden. Eine Einbeziehung in den Unterricht ist ja keine Verpflichtung, dieses schwierige Vorgehen durchführen zu müssen. Es könnte aber helfen, die mit ihrer Anwendung verbundenen Schwierigkeiten aufzuzeigen (SELTER, 2000a, S. 253). Dazu können Strategiekonferenzen, eventuell auch Rechentagebücher hilfreich sein, um die Denkwege der Kinder für die Lehrperson erfahrbar zu gestalten, um darauf eingehen zu können. Doch nicht nur für die Lehrperson, sondern auch für die anderen Kinder ist dadurch anderes Denken öffentlich, das eventuell Lernprozesse auslöst.

Den Kindern individuell Zeit und Raum geben, um grundlegende mathematische Strukturen zu verstehen

Natürlich haben die in diesem Beitrag gegebenen quantitativen Aussagen nur eine eingeschränkte Aussagekraft. Anerkennenswert ist trotzdem, dass ca. drei Viertel der Aufgaben korrekt gelöst wurden. Dabei fiel den Schülerinnen und Schülern die Lösung der Plusaufgaben - wie erwartet – leichter als die der verwendeten Minusaufgaben. Unterschiede zeigen sich auch in der Erfolgsquote der einzelnen Rechentypen. Das Verfahren mit der höchsten Erfolgsquote ist schriftliches Rechnen, gefolgt von Zahlenrechnen. Am niedrigsten ist die Erfolgsquote beim ziffernweise mündlichen Rechnen. Extrem niedrig ist die Erfolgsrate bei der Kombination Subtraktion mit ziffernweise mündlichem Rechnen. Während beim Zahlenrechnen (Kopf, halbschriftlich) sich die Lösungsrate bei Addition und Subtraktion nicht unterscheiden, gibt es deutliche Abweichungen beim ziffernweise mündlichen Rechnen, vermutlich verursacht durch fehlende mathematische Strukturen oder durch die Komplexität der Anforderungen.

Das bedeutet für den Mathematikunterricht, dass im weitesten Sinn auf das Verstehen fundamentaler Strukturen mehr Wert gelegt werden soll. So erscheint es in einer Förderstunde sinnvoller, nicht noch einmal die Rechnungen der letzten Unterrichtsstunde zu wiederholen, sondern fundamentale Zahlvorstellungen zu thematisieren. Das System des Stellenwerts, der Bündelung oder der Struktur der Rechenoperationen sind Ideen, die jedes Kind erfassen sollte. Die vordergründig verlorene Zeit für das Üben von Rechenverfahren kann später durch das allumfassende Verstehen der Zahlen und Operationen kompensiert werden. Keine neue Forderung, sie soll aber trotzdem nochmals wiederholt aufgezeigt werden.

Fähigkeitsselbstkonzept der Mädchen stärken

Vergleicht man bei dieser Untersuchung das Wahlverhalten und die Korrektheit der Lösung bei Buben und Mädchen, so traten die schon bekannten Effekte ein. Die Erfolgsquoten zwischen den Buben und Mädchen unterschieden sich allgemein nicht, von der Tendenz her hatten die Buben etwas bessere Leistungen. Unterschiedlich war das Resultat in der Kombination ziffernweise mündliches Rechnen, gepaart mit der Subtraktion. Hier ist ein deutlicher Unterschied zu gunsten der Buben zu sehen.

Dies kann als Hinweis verstanden werden, dass kognitive Potentiale bei den Mädchen in geringerem Grad in mathematische Kompetenz umgesetzt werden können. Mädchen in dieser Stichprobe gehen an Rechenoperationen vorsichtig abwägend heran, in dem sie oft mit den Ziffern in den Stellenwerten rechnen. Allgemeingültiges, die Zahlvorstellungen förderliches Vorgehen tritt weniger auf. Mädchen zeigen weniger Mut, die Zahlganzheiten zu sehen. Offen bleibt, ob Mädchen schon im Volksschulalter meinen, dass sie für Mathematik nicht so geeignet sind, weil dieser Aspekt nicht in die Untersuchung miteinbezogen wurde. Vielleicht können individuelle Beurteilungsformen Bewusstseinsänderungen herbeiführen (KAMMERMEYER & MARTSCHINKE, 2003).

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass zielführendes mathematisches Vorgehen bei Plus- und Minusaufgaben unmittelbar mit einem fundierten Zahlen- und Operationsverständnis gekoppelt ist, das sich vor allem im Rechnen mit Zahlganzheiten zeigt. Jonglieren Kinder mit Ziffern in den Stellenwerten, dann sinkt die Korrektheit der Lösungen, insbesondere bei den Minusrechnungen. „Retten“ können sie nur automatisierte schriftliche Rechenverfahren, die zwar kurzzeitig bei Addition und Subtraktion Erfolge zeigen, aber langfristig nicht das mangelnde Zahlenverständnis ausgleichen können.

8 LITERATUR

AG MATHEMATIK (2003a): *Matheblitz 2.* Arbeitsbuch, Teil 1. Wien: Jugend & Volk

AG MATHEMATIK (2003b): *Matheblitz 2.* Arbeitsbuch, Teil 2. Wien: Jugend & Volk

AG MATHEMATIK (2003c): *Matheblitz 2.* Übungsbuch B. Wien: Jugend & Volk

BENZ, Christiane (2005): *Erfolgsquoten, Rechenmethoden, Lösungswege und Fehler bei Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100.* Hildesheim: Franzbecker

BILDUNGSSTANDARDS Mathematik 4 (Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur, Hrsg., 2008) in Druck.

BOSSONG, Bernd (2006): Wie sympathisch bin ich meiner Lehrerin und wie schätzt sie meine Fähigkeiten ein? Zum Einfluss wahrgenommener Lehrereinstellungen auf Selbstkonzepte der Fähigkeit bei Grundschülern. In: HOSENFELD, Ingmar, SCHRADER, Friedrich-Wilhelm (Hrsg.): *Schulische Leistung. Grundlagen, Bedingungen, Perspektiven.* Münster: Waxmann

BRANDON, P. R., NEWTON, B. J., HAMMOND, O. W. (1985): The superioty of girls over boys in mathematics achievement in Hawaii. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago.

DICKHÄUSER, Oliver, STIENSMEIER-PELSTER, Joachim (2003): Wahrgenommene Lehrereinschätzungen und das Fähigkeitsselbstkonzept von Jungen und Mädchen in der Grundschule. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 50,* S. 182 – 190

ELIA, Iliade (2007): Multiple Representations in Mathematical Problem Solving: Exploring Differences between Boys and Girls in Primary School. In: CHIONIDOU-MOSKOFOGLOU, Maria, BLUNK, Andrea, SIEMPRINSKA, Renata, SOLOMON, Yvette, TANZBERGER, Renate (Hrsg.): *Promoting equity in maths achievement. Proceedings of the Project's Workshops: Barcelona (25 January 2007) Paris (25 April 2007)* (S. 143 – 149). [Elektronische Version unter http://www.iacm.forth.gr/educational/Publications/PREMA%20Barcelona.pdf]

FAST, Maria, GSTATTER, Karin, WISER, Brigitte (2005): Förderung mathematisch leistungsstarker Kinder im Klassenverband. URL: http://imst.uni-klu.ac.at/imst-wiki/images/4/44/213_Langfassung_Fast.pdf [10. Juli 2008]

FENNEMA, Elizabeth, CARPENTER, Thomas P., JACOBS, Victoria R., FRANKE, Megan L., LEVI, Linda W. (1998): A Longitudinal Study of Gender Differences in Young Children's Mathematical Thinking. In: *Educational Researcher*, 27 (5), S. 6 – 11.

FRANKE, Marianne, LEHMANN, Nadine (2005). Wozu brauchen wir da noch Unterricht, die Kinder können ja schon alles. In: *Grundschulunterricht*, *52* (7 – 8), S. 5 – 10

FUSON, Karen C., WEARNE, Diana , HIEBERT, James C. , MURRAY, Hanlie G., HUMAN, Pieter G., OLIVIER, Alwyn I., CARPENTER, Thomas P., FENNEMA, Elizabeth (1997): Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 28* (2), S. 130 – 162

GÖTZ, Stefan, REICHEL, Hans-Christian (1998): *TIMMS 1998. Informationen - Beispiele – Folgerungen.* Wien: Hölder-Pichler-Tempsky

HELMKE, Andreas (1992): *Selbstvertrauen und schulische Leistung.* Göttingen: Hogrefe

HELMKE, Andreas (1997): Individuelle Bedingungsfaktoren der Schulleistung: Ergebnisse aus dem SCHOLASTIK-Projekt. In: WEINERT, Franz E., HELMKE, Andreas (Hrsg.): *Entwicklung im Grundschulalter* (S. 203 – 216). Weinheim: Beltz

HORNE, Marj (2003): *Gender differences in the early years in addition and subtraction.* Paper presented at the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference. Held Jointly with the 25th PME-NA Conference (Honolulu, Hawaii, Jul 13-18, 2003, v3 p79–86)

JAHNKE-KLEIN, Silvia (2004): *Sinnstiftender Mathematikunterricht für Mädchen und Jungen.* Hohengehren: Schneider-Verlag

KAMMERMEYER, Gisela & MARTSCHINKE, Sabine (2003): Schulleistung und Fähigkeitsselbstbild im Anfangsunterricht – Universelle Beziehungen oder kontextspezifische Zusammenhänge? Ergebnisse aus dem KILIA-Projekt. *Empirische Pädagogik, 17* (4), S. 486 – 503.

KIMBALL, Meredith M. (1989): A new perspective on women's math achievement. *Psychological Bulletin, 105* (2), S. 198 – 214

KRAUTHAUSEN, Günter (1993): Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: Für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden. In: *Journal für Mathematikdidaktik, 14* (3 – 4), 189 – 219.

LACHANCE, Jennifer A., MAZZOCCO, Michèle M. M. (2006): A longitudinal analysis of sex differences in math and spatial skills in primary school age children. In: *Learning and Individual Differences*, 16 (3), S. 195 – 216

LEHRPLAN der Volksschule: Verordnung des Bundesministeriums für Unterricht, Kunst und Kultur über die Lehrpläne an Volksschulen. BGBl. Nr. 134/1963 in der Fassung BGBl. II Nr. 107/2007 vom 9. Mai 2007. URL: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/14055/lp_vs_gesamt.pdf [14. Juli 2008]

MOSEL-GÖBEL, Doris: Algorithmusverständnis am Beispiel ausgewählter Verfahren der schriftlichen Subtraktion. Eine Fallstudienanalyse bei Grundschülern. In: *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, 16* (12), S. 554 - 559

MULLIS, Ina V.S., MARTIN, Michael O., FIERROS, Edward G., GOLDBERG, Amie L., STEMLER, Steven E. (2000): *Gender Differences in Achievement. IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS).* Boston: International Study Center, Lynch School of Education, Boston College [Elektronische Version unter http://timss.bc.edu/timss1995i/gender.html]

MULLIS, Ina V.S., MARTIN, Michael O., FOY, Pierre (2005): I*EA's TIMSS 2003. International Report on Achievement in the Mathematics Cognitive Domains. Findings from a Developmental Project.* Boston: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College. [Elektronische Version unter http://timss.bc. edu/PDF/t03_download/T03MCOGDRPT.pdf]

PADBERG, Friedhelm (2005). *Didaktik der Arithmetik* (3. Auflage). Heidelberg: Elsevier Spektrum Akademischer Verlag

PLUNKETT, Stuart (1987): Wie weit müssen Schüler heute noch die schriftlichen Rechenverfahren beherrschen? In: *mathematik lehren,* (Heft 21), 43 – 46.

RADATZ, Hendrik, SCHIPPER, Wilhelm, DRÖGE, Rotraud, EBELING, Astrid (1998): *Handbuch für den Mathematikunterricht 2. Schuljahr*. Hannover: Schroedel

RATHGEB-SCHNIERER, Elisabeth (2006): *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker

RATZKA, Nadja (2003): *Mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten am Ende der Grundschulzeit.* Hildesheim: Franzbecker

REISS, Kristina, HEINZE, Aiso, PEKRUN, Reinhard (2008): Mathematische Kompetenz und ihre Entwickung in der Grundschule. In: PRENZEL, Manfred, GOGOLIN, Ingrid, KRÜGER, Heinz-Hermann (Hg.): Kompetenzdiagnostik [Sonderheft 8/2007]. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 10,* S. 107 – 127.

ROTTMANN, Thomas, SCHIPPER, Wilhelm (2002): Das Hunderter-Feld – Hilfe oder Hindernis beim Rechnen im Zahlenraum bis 100? *Journal für Mathematik-Didaktik, 23* (1), S. 51 - 74

SCHREINER, Claudia (2007): Mathematik-Kompetenz im internationalen Vergleich. In: SCHREINER, Claudia (Hrsg.): PISA 2006. Internationaler Vergleich von Schülerleistungen (S. 48 – 55). Graz: Leykam [Elektronische Version unter http://www.pisa-austria.at/pisa2006/files/PISA2006_ZVB_Erste Ergebnisse_041207.pdf vom 4. Juli 2008]

SCHÜTTE, Sybille (2004): Rechenwegnotation und Zahlenblick. *Journal für Mathematik-Didaktik, 25* (2), S. 130 - 148

SELTER, Christoph (2000a): Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. In: *Journal für Mathematikdidaktik, 21* (3 – 4), 227 – 258

SELTER, Christoph (2000b): Wie lösen Viertklässler Plus- und Minusaufgaben im Tausenderraum? *Sache-Wort-Zahl, 28* (29), S. 54 – 58

SELTER, Christoph, SPIEGEL, Hartmut (1997): *Wie Kinder rechnen.* Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Ernst Klett Grundschulverlag

STERN, Elsbeth (1998): Die Entwicklung schulbezogener Kompetenzen: Mathematik. In: WEINERT, Franz E. (Hrsg.): *Entwicklung im Kindesalter* (S. 95 – 113). Weinheim: Beltz

TIEDEMANN, Joachim (1995): Geschlechtstypische Erwartungen von Lehrkräften im Mathematikunterricht der Grundschule. In: *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 9* (3–4), S. 153 – 161.

TIEDEMANN, Joachim (2000): Parents’ gender stereotypes and teachers’ beliefs as predictor of children’s concept of their mathematical ability in elementary school. *Journal of Educational Psychology, 92,* S. 1 – 8

TIEDEMANN, Joachim, FABER, Günter (1994a): Mädchen und Grundschulmathematik: Ergebnisse einer vierjährigen Längsschnittuntersuchung zu ausgewählten geschlechtsbezogenen Unterschieden in der Leistungsentwicklung. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 26* (2), S. 101 – 111

TIEDEMANN, Joachim, FABER, Günter (1994b): Ist Mathe nicht für Mädchen? Mädchen unterschätzen sich im Mathematikunterricht. In: *Die Grundschulzeitschrift* (Heft 74), S. 33 – 35

WITTMANN, Erich Ch. (1999): Die Zukunft des Rechnens im Grundschulunterricht: Von schriftlichen Rechenverfahren zu halbschriftlichen Strategien. In: HENGARTNER, Elmar (Hg.): *Mit Kindern lernen. Standorte und Denkwege im Mathematikunterricht.* 88 – 93. Zug: Klett und Balmer