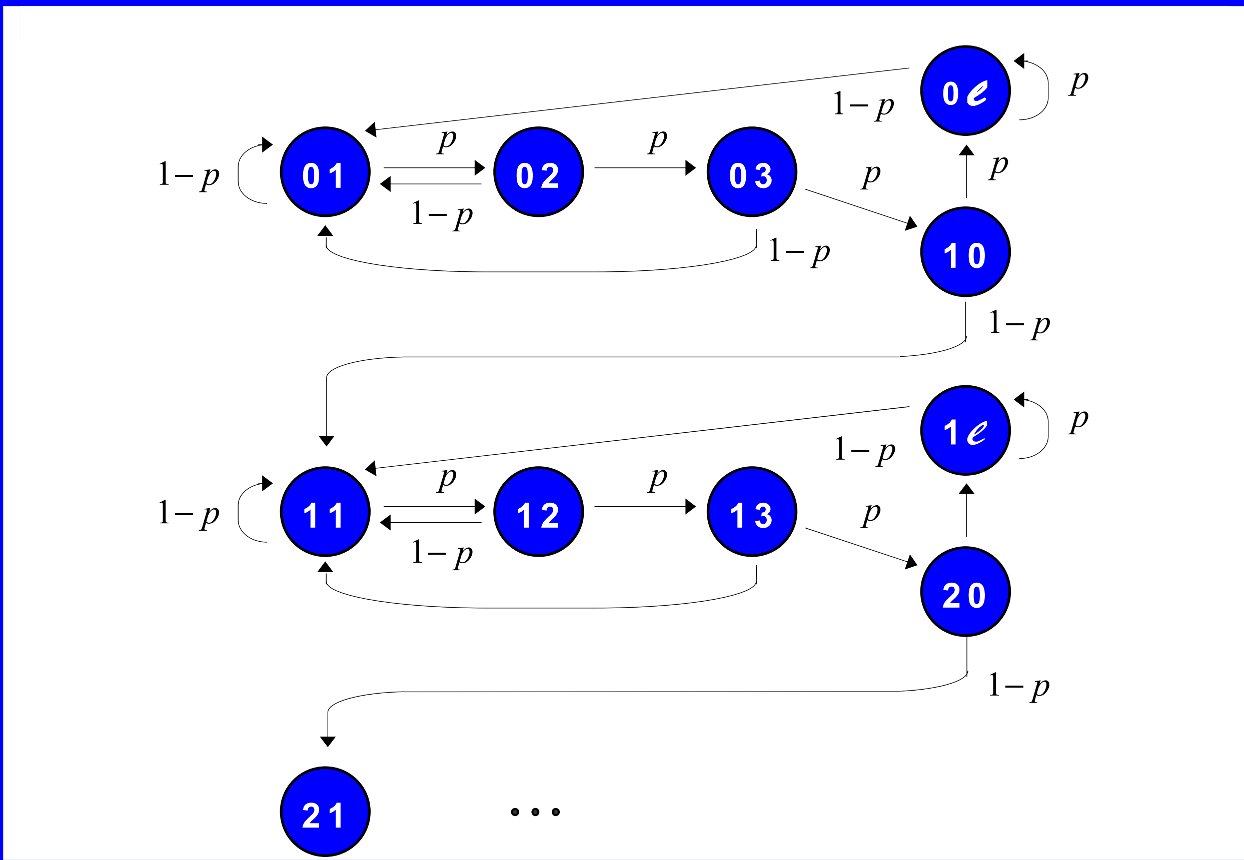
Band 31 • 2011 • Heft 3 € 9,00

Stochastik

in der Schule



Stochastische Überraschungen beim Spiel BINGO

Wechseln? Neue Variationen zum Ziegenproblem

Warten auf einen Run – und was kommt dann?

Motivation bei Wettbewerben

Die magische Zahl 7

Herausforderungen für Unterricht und Ausbildung von Lehrpersonen

Markow-Ketten: Wie man Praktikanten aus der Schule beschäftigen kann

Interaktive Angebote zur Statistik

KLAUS SEEBERGER VERLAG

Stochastik in der Schule SiS

Zeitschrift des Vereins zur Förderung des schulischen Stochastikunterrichts

Inhaltsverzeichnis

Heft 3, Band 31 (2011)

Vorwort des Herausgebers

Forschungen mit angehenden Lehrern zeigen noch immer große Schwierigkeiten und Fehlvorstellungen hinsichtlich statistischer Grundideen auf. Die Ziele der Ausbildung können angesichts der rasanten Weiterentwicklung statistischer Methoden gar nicht hoch genug angesetzt werden. Engel berichtet über eine große Studie, in der man sich diesen Herausforderungen stellt.

Humenberger und Henze illustrieren, wie kreativ man mit kombinatorischen Aufgaben umgehen kann: Eine rekursive Anwendung von „hinten" weitet die Sichtweisen, reduziert die Schwierigkeiten und klärt so manche falsche Vorstellung. Haake gibt dem schon klassischen Ziegenproblem einen neuen Dreh – der Moderator gibt das Angebot, eine Tür zu öffnen, nicht immer, der Kandidat kann nicht immer wechseln.

Riehl kehrt zu Markow-Ketten zurück und zeigt, wie man diese ohne größeres mathematisches Instrumentarium mit einer Tabellenkalkulation – rekursiv – lösen kann. Die Frage nach Runs wird damit in vielen Varianten analysierbar. Gebhardt und Borovcnik berichten, wie Praktikanten an der Universität lernen, Goethe-Texte mit Markow-Ketten zu modellieren. Ich erinnere daran, dass Christmann vor Jahren mit diesem Ansatz Beethoven und Mozart nach"gespielt" hat.

König referiert einen Grundsatzstreit zwischen Psychologen und Entscheidungstheoretikern, in dem es zwei völlig konträre Erklärungen gibt für den N-Effekt, wonach sich Menschen „demotiviert" fühlen, wenn die Zahl der Bewerber ansteigt. Allerdings kann man – nur mit dem Zufall – zeigen, dass es mit größerer Zahl der Mitbewerber schwieriger wird, zu den, sagen wir, Top 10% zu gehören. Richardson und Reischman stellen ein psychologisches Experiment zur Merkfähigkeit vor: Kann man sich mehr als 7 von mehreren zusammenhanglosen Informationseinheiten merken? Das Experiment führt spielerisch zum t-Test.

Die Bibliographische Rundschau von König ist informativ wie immer. Ich hoffe, Sie finden im vorliegenden Heft wertvolle Anregungen für Ihre unterrichtlichen Bemühungen.

Klagenfurt, im August 2011 Manfred Borovcnik

Die magische Zahl 7

MARY RICHARDSON UND DIANN REISCHMAN, ALLENDALE, MI, U.S.A.

ÜBERSETZUNG UND BEARBEITUNG: MANFRED BOROVCNIK, KLAGENFURT

Zusammenfassung: *In diesem Aufsatz wird ein psychologisches Experiment beschrieben, das die Merkfähigkeit prüft. In einem interaktiven Experiment werden die Daten gesammelt und anschließend mit dem* t-*Test oder dem Vorzeichen-Test ausgewertet. Der Beitrag soll illustrieren, wie durch aktive Teilnahme der Studierenden auch theoretische Methoden der Statistik an Anziehungskraft gewinnen. Aktives Lernen erhöht die Motivation und lässt die Voraussetzungen der Verfahren besser verstehen.*

1 Einleitung

Unsere Universität bietet ein vielfältiges Angebot in der einführenden Vorlesung in die Angewandte Statistik an. Voraussetzung für die Vorlesung selbst ist Algebra auf College-Niveau. Im Kurs lernen die Studierenden statistische Begriffe und Anwendungen in realen Situationen mit interaktiven Experimenten.

Die in diesem Aufsatz beschriebene Aktivität wurde durch einen Artikel des Kognitionspsychologen George Miller angeregt. Insbesondere behauptet Miller (1956) im Zusammenhang mit Fragen zum Kurzzeit-Gedächtnis, dass die meisten Leute sich nur an 7 plus oder minus 2 Informationseinheiten erinnern können.

2 Das Unterrichtsexperiment

Bevor die Studierenden mit diesem Experiment konfrontiert werden, haben sie sich schon mit Stichprobenverteilungen sowie statistischen Verfahren zur Beurteilung von Anteilen und Konfidenzintervallen für den Erwartungswert beschäftigt.

Nachdem die Einzelheiten des Ein-Stichproben-*t*-Tests erklärt worden sind, haben wir in diesem Experiment Daten für eine gemeinsame Aktivität „erzeugt“. Wir nützen dies auch, um eine Anwendung dieses Tests zu illustrieren, noch bevor das formale Testverfahren eingeführt wird.

Wir verteilen zu Beginn das Arbeitsblatt (siehe Anhang). Dieses gibt in knapper Weise den Hintergrund zum Experiment wieder und erklärt das Ziel der Vorgangsweise. Wir versuchen auch herauszubekommen, ob die Klasse „besser“ ist als die „sieben plus minus zwei“-Regel von Miller besagt. Insbesondere wollen wir auch bestimmen, ob ein typischer College-Student sich mehr als 7 Informationseinheiten, die ohne jeden Zusammenhang sind, merken kann.

Zur Durchführung des Experiments und zur Sammlung der Daten benutzen wir eine Vorführung mit Power Point. Dabei werden 15 Folien gezeigt. Jede der Folien zeigt ein anderes Wort. Jedes Wort erscheint auf der Projektionsleinwand für eine Sekunde; die Wörter weisen keinerlei Zusammenhang auf. Nachdem alle 15 Wörter gezeigt worden sind, werden die Studierenden aufgefordert, möglichst viele der Wörter, die sie sich merken konnten, auf dem Arbeitsblatt zu notieren. Danach wird eine Folie mit allen Wörtern gezeigt.

Die Studierenden werten anschließend die Daten, wie viele Wörter sie sich korrekt gemerkt haben, auf der Tafel aus. Der Merkfähigkeitstest ist auch im Internet abrufbar, siehe PositScience (o.J.). Bei jedem Aufruf des Experiments wird eine neue Liste von 15 Wörtern erzeugt.

Tabelle 1 zeigt die Liste der 15 Wörter, die wir im Experiment benutzt haben.

Montage	Ohr	Stadtviertel	Thron	Brennpunkt
Lautstärke	Nichte	hilfreich	Freund	Saat
Legende	Ausguss	etwas	Krake	kurz

Tab 1: Liste der Wörter, die beim Test zum Kurzzeit-Gedächtnis verwendet wurden

Wir erhielten von den 50 Studierenden die folgenden Daten der korrekt erinnerten Wörter:

3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 12

Tab. 2: Anzahl der korrekt erinnerten Wörter im Test

Vor der eigentlichen Datenanalyse könnte man, besonders in einer kleineren Klasse, die Studierenden dazu anregen, nach Ausreißern zu suchen, die Schiefe der Verteilung zu beurteilen, und zu überprüfen, ob die Voraussetzungen des *t*-Tests ausreichend erfüllt sind.

Original ‚The Magical Number 7’ in *Teaching Statistics* 33(2011)1, 17–19

3	0
4	0
5	000
6	00000
7	0000000000000
8	00000000000
9	00000000
10	0000000
11	
12	0

Abb. 1: Stamm-und-Blatt-Diagramm für die Anzahl der erinnerten Wörter

Im Abschnitt „Erweiterungen" diskutieren wir einen nicht-parametrischen Test, der auch dann angewendet werden kann, wenn die Normalverteilung für die Anzahl der korrekt erinnerten Wörter schlecht erfüllt ist. In einer größeren Klasse könnte man als Unterrichtender andiskutieren wollen (oder auch müssen), dass der *t*-Test auch mit Ausreißern und schiefen Verteilungen verwendet werden kann.

Ein anderes Problem liegt darin, dass die Anzahl korrekt erinnerter Wörter nur wenige Werte annehmen kann. Dennoch kann man die Verteilung der *durchschnittlichen* Anzahl von erinnerten Wörtern (oder deren verschobene und skalierte Version in der *t*-Statistik) ausreichend gut durch eine stetige Verteilung approximieren, wenngleich sie von Natur aus natürlich diskret bleibt.

[Wegen des Zentralen Grenzverteilungssatzes kann man die Verteilung durch eine Normalverteilung approximieren. Eigentlich müsste man für den Test die Quantile der Normalverteilung heranziehen, obwohl die Standardabweichung geschätzt wird, denn es gibt kein „Argument", wonach die Test-Verteilung *näherungsweise t*-verteilt ist. In der Praxis berücksichtigt man dies eher selten.]

Wir haben unsere Studierenden aufgefordert, Stichprobenmittel, Standardabweichung und die Fünf-Zahlen-Zusammenfassung der Anzahl korrekt erinnerter Wörter zu bestimmen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 zusammen gefasst.

	n	50
	Mittel	7.70
	Standardabweichung	1.741
5 Zahlen-Zusammen-fassung	Minimum	3.00
	25. Perzentil [0.25-Quantil]	7.00
	Median	8.00
	75. Perzentil [0.75-Quantil]	9.00
	Maximum	12.00

Tab. 3: Kennziffern für die Daten der Klasse

Wir haben die Studierenden auch ein Stamm-und-Blatt-Diagramm anfertigen lassen; das Ergebnis ist in Abbildung 1 zu sehen.

Nun wird ein *t*-Test angewendet um zu beurteilen, ob man aus den Daten schließen kann, dass die mittlere Anzahl der korrekt erinnerten Wörter signifikant größer als 7 ist. Für die vorliegenden Daten ergibt sich der Wert der *t*-Statistik zu

$t = 2.84$ mit einem p-Wert von 0.003.

An den *t*-Test schließt die Interpretation des *p*-Werts an. Ferner wird ein Konfidenzintervall für die Anzahl korrekt erinnerter Wörter bestimmt und interpretiert. Für die Daten ergibt sich ein

95%-Konfidenzintervall zu (7.21, 8.19).

[Die Daten legen eine Verschiebung des Gesetzes von Miller um ca. 2/3 nahe. Das Experiment kann aber nicht klären, ob College-Studierende tatsächlich so viel besser sind als die Population, oder ob die gesamte Population heute im Vergleich zu 1956 besser geworden ist. Es könnten einfach 2/3 der Studierenden ihre Ergebnisse um einen Punkt „geschönt" haben.]

3 Erweiterungen

In einer kleineren Klasse mögen die Daten zu den erinnerten Wörtern nicht einer Normalverteilung folgen; dann kann man auf den Ein-Stichproben-Vorzeichen-Test ausweichen. Wir verwenden die obigen Daten, um diesen Test zu illustrieren. Wenn die Voraussetzungen dafür erfüllt sind, sollten die Studierenden jedoch den *t*-Test vorziehen, weil er eine größere Macht hat.

[Macht ist die Gegenwahrscheinlichkeit zum β-Fehler. $\beta(\mu)$ ist die Wahrscheinlichkeit – oder eben *Macht* – des Tests, einen von der Nullhypothese – hier 7 – abweichenden Wert μ für den Erwartungswert der korrekt erinnerten Wörter zu *erkennen*, d.h., die Nullhypothese zu Recht abzulehnen.]

Bezeichne η den Median der Population, so sollten die Studierenden die Hypothesen als H_0: $\eta = 7$ gegen H_1: $\eta > 7$ formulieren können. Unter den Daten gibt es 13 Werte, die mit dem Wert aus der Nullhypothese, das ist 7, übereinstimmen. Diese [tragen zur Beurteilung nichts bei und] werden gestrichen. Es verbleiben 37 Daten. Von diesen sind 10 Werte kleiner aber 27 größer als 7, wie die Studierenden leicht sehen können.

[Der Vorzeichen-Test bezieht sich auf den Median anstelle des Mittelwerts. Bei symmetrischen Verteilungen fallen beide Parameter aber zusammen.]

Der p-Wert der Beobachtung ist daher $P(X \geq 27)$, wobei X unter der Nullhypothese einer Binomialverteilung mit den Parametern $n = 37$ und $p = 0.5$ folgt. Mit geeigneten Berechnungshilfen können die Studierenden den p-Wert zu 0.004 bestimmen. Diesen Wert müssen sie dann geeignet interpretieren.

[Wenn man nicht schon durch Vorstudien starke Hinweise bekommt über die Richtung der Abweichungen von der Nullhypothese, so sollte man eigentlich nur zweiseitig und nicht einseitig testen. Die angegebenen p-Werte verdoppeln sich dadurch. Dies führt aber weder beim t-Test noch beim Vorzeichen-Test zu einer Änderung der Entscheidung, zumindest, wenn man sich auf ein Niveau des Tests von $\alpha \geq 0.01$ bezieht.]

4 Zusammenfassung

Die Arbeit an der magischen Zahl 7 ist bei den Studierenden sehr gut angekommen; sie bringt ein wenig Leben in die Diskussion des Ein-Stichproben-t-Tests und des Ein-Stichproben-Vorzeichen-Tests. Studierende sind am Hintergrund der Fragen interessiert und machen bei den Aktivitäten gerne mit, wissbegierig, ob denn nun die Vermutung von Miller (1956) auch heute noch gültig ist.

Anmerkung: Ergänzungen des Übersetzers sind durch eckige Klammern [ ] kenntlich gemacht.

Epilog

[Die psychologischen Experimente rund um die Wahrnehmung betrafen auch musikalische Töne, Binärzahlen und Buchstaben. Im Kurzzeitgedächtnis verhaften 7 plus oder minus 2 – mehr oder weniger.

Können wir uns wirklich nur 7 zusammenhanglose Informationsteile merken? Viele Telefonnummern bestehen auch tatsächlich nur aus 7 Ziffern. Die abendländischen Tonleitern bestehen innerhalb einer Oktave aus 7 Grundtönen. Ja selbst die Likert-Skala zum Messen einer „Einstellung“ hat 7 Werte. Hängt das mit einem „ehernen“ Gesetz unserer Unterscheidungs- und Merkfähigkeit zusammen? Andere Gesetze gehen gar nur von 4 Informationseinheiten aus (Bachelder 2001). Selbst Telefonnummern gruppieren wir häufig nach Dreier- und Vierergruppen, um sie besser merken zu können.

Das Schlagwort hinsichtlich Lernen ist, die zusammenhanglosen Einheiten an Information durch (fingierte oder bloß offen gelegte) Zusammenhänge in Verbindung zu bringen und damit unsere Beschränkungen zu umgehen. Beim Memory-Spiel etwa sind Spieler im Vorteil, die sich zwischen aufgedeckten Karten eine Geschichte ersinnen.

Wenn es um Arbeitsgruppen geht, so hat Hall (1986) ein „Gesetz“ der optimalen Größe mit 8 bis 12 Teilnehmern formuliert und begründet dies mit „[…] Teilnahme und Engagement fällt in größeren Gruppen – Mobilität leidet; Führungskraft entwickelt sich nicht natürlich sondern ist manipulativ und politisch.“

Interessant hier ein Querverweis auf das N-Gesetz, das im Artikel von König (2011) in diesem Heft behandelt wird. Nach diesem Gesetz ist die Motivation in einem Wettbewerb sich anzustrengen umso kleiner, je größer die N Zahl der Teilnehmer ist.

Die 7 hat wirklich einen magischen Anstrich. Von den 7 Weltwundern bis zu den 7 Todsünden spannt sich der Bogen. Spannend, dass man sie nun auch einsetzen kann, um Prinzipien der Angewandten Statistik zu motivieren. Von der Fragestellung, ob wir als Klasse von diesem psychologischen Gesetz abweichen oder nicht, ist ein direkter Weg zur Formulierung der Hypothesen geebnet.

Während der Analysen sind die Ergebnisse immer auf die ausgehende Frage zurückzubeziehen. Die Antwort selbst kann man schließlich hinterfragen: Sind College-Studenten besser oder liegt es an einer zeitlichen Entwicklung seit 1956? Oder liegt es an der unzuverlässigen Datenerhebung, welche Manipulationen ermöglicht? Die zentrale Stellung der ausgehenden Frage aus dem Kontext einer Anwendung für den Fortgang der statistischen Analysen und die Interpretation der Ergebnisse kann man auch in einem eher rezeptartigen Kurs hervorstreichen. Mit der die Studierenden direkt ansprechenden magischen 7 jedoch bekommt sie einfach mehr Leben. Insgesamt sollte man sich aber hüten, solch „einfache“ Gesetze überzuinterpretieren.]

Literatur

[Bachelder; B. L. (2001): The magical number 4 = 7: Span theory on capacity limitations. In: *Behavioral and Brain Sciences* 24, 116–117.

Hall (1981): Beyond Culture. New York: Anchor Books Edition.

König, G. (2011): Motivation bei Wettbewerben: Stochastische Aspekte einer Diskussion in der Zeitschrift „Psychological Science“. In: *Stochastik in der Schule* 31(3)]

Miller, G. (1956): The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *The Psychological Review* 63(2), 81–97. www.musanim.com/miller1956 (Zugriff: 1.7.2011).

PositScience (o.J.): *Brain Training Software*. bfc.positscience.com/eval/wlr.php (Zugriff: 1.7.2011).

Anschrift der Verfasser

Mary Richardson und Diann Reischman
Department of Statistics
Grand Valley State University, Allendale, MI, U.S.A.
richamar.gvsu.edu

Die magische Zahl 7

Arbeitsblatt zum Merkfähigkeitstest

Hintergrund:

„Die magische Zahl Sieben plus oder minus Zwei: Einige Grenzen für unsere Fähigkeit, Information zu verarbeiten“ ist ein Aufsatz des Kognitionspsychologen George A. Miller aus dem Jahr 1956. Miller ist heute emeritierter Professor vom Psychologie-Institut der Princeton Universität.

Millers Artikel streicht hervor, dass Messungen der Kapazität für das Kurzzeit-Gedächtnis Grenzen von 7 ± 2 ergeben haben. Mit anderen Worten, Miller stellt die Hypothese auf, dass die meisten Menschen sich zwischen 5 und 9 von (untereinander zusammenhanglosen) Informationseinheiten korrekt merken können.

Vorgangsweise:

In einer Power Point-Vorführung werden Sie 15 Wörter, immer eines nach dem anderen, für jeweils eine Sekunde sehen. Lesen Sie die Wörter und versuchen Sie, sich diese zu merken, *ohne dabei Notizen zu machen*.

Sammlung der Daten:

Nachdem die Power Point-Vorführung beendet ist, schreiben Sie hier möglichst viele Wörter auf, die Sie sich merken konnten:

Überprüfen Sie Ihre Antworten: Vergleichen Sie mit der vollständigen Liste der 15 Wörter (wird auf der Leinwand angezeigt werden). Wie viele der Wörter konnten Sie korrekt angeben?

Anzahl der korrekt erinnerten Wörter = ______

Schreiben Sie diese Zahl auf die Tafel.

Notieren Sie hier die Daten für die ganze Klasse:

Analyse der Daten der Klasse:

a. Berechnen Sie das Stichprobenmittel, die Standardabweichung und die Fünf-Zahlen-Zusammenfassung der Anzahl der korrekt erinnerten Wörter.

b. Führen Sie einen *t*-Test durch, um zu bestimmen, ob die Daten der Klasse die „sieben plus oder minus zwei“-Regel von Miller ablehnen lassen – d.h., ergeben die Daten einen signifikanten Beleg dafür, dass College-Studenten im Durchschnitt sich mehr als 7 von den 15 Wörtern korrekt merken?

c. Interpretieren Sie mit eigenen Worten den *p*-Wert für diesen Hypothesentest.

d. Bestimmen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für die mittlere Anzahl korrekt erinnerter Wörter und interpretieren Sie dieses.

e. Sind die Ergebnisse in c. und d. vertrauenswürdig? Diskutieren Sie insbesondere, ob die nötigen Voraussetzungen für den *t*-Test ausreichend erfüllt sind.

f. Führen Sie einen Ein-Stichproben-Vorzeichen-Test durch, um zu bestimmen, ob die Daten einen signifikanten Beleg darstellen, dass College-Studenten sich mehr als 7 von 15 Wörtern korrekt merken können.

g. Interpretieren Sie in eigenen Worten den *p*-Wert für den Vorzeichen-Test.

VEREIN ZUR FÖRDERUNG DES SCHULISCHEN STOCHASTIKUNTERRICHTS e.V.
Vorstand: Rolf Biehler◆ Inst. f. Mathematik◆Universität Paderborn◆33098 Paderborn; Gerhard König◆
Lauenburger Str.45◆76139 Karlsruhe; Elke Warmuth◆Drosselgasse 5◆15806 Zossen

☐ Hiermit abonniere ich die Zeitschrift *Stochastik in der Schule* (3 Hefte/Jahr)
zum Preis von 25,00 € /Jahr (Stand 01.01 2011).

☐ Hiermit trete ich dem *Verein zur Förderung des schulischen Stochastikunterrichts* bei.
Jährlicher Beitrag (incl. Bezug von *Stochastik in der Schule)* ist 27,00 €
(Stand 01.01.2011).

Name, Vorname: ____

PLZ, Ort, Straße: ____

Datum, Unterschrift: ____

Bitte erteilen Sie einen Abbuchungsauftrag.
Sie erleichtern damit die ehrenamtliche Geschäftsführung! Danke.

EINZIEHUNGSAUFTRAG

Ich/Wir beauftrage(n) den *Verein zur Förderung des schulischen Stochastikunterrichts e.V., Dortmund,* bis auf Widerruf, den Rechnungsbetrag

☐ für das Abonnement der Zeitschrift *Stochastik in der Schule*

☐ für den Vereinsbeitrag

von meinem/unserem Konto abzubuchen.

Name: ____

Anschrift: ____

Abonnentennummer ______________________ (falls bekannt)

Geldinstitut: ____

Bankleitzahl: ____

Kontonummer: ____

Ort, Datum: ____________________ Unterschrift: ________________________

Zurück an: **Frau Dr. Elke Warmuth◆Drosselgasse 5◆15806 Zossen**, **Fax:03377-303622**

E-Mail: warmuth@math.hu-berlin.de